UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

PROGRAMA ACADÉMICO DE FILOSOFÍA

Análisis lógico del concepto de probabilidad

TESIS

Para optar el Grado Académico de Bachiller en Filosofía

AUTOR

Luis Adolfo PISCOYA HERMOZA

Lima - Perú

1970

A José Luis y Aurora,
mis padres.

I N D I C E

NOTA PRELIMINAR

La versión original del presente trabajo, de conformidad con el nuevo Reglamento de Grados y Títulos de la Universidad, ha sido examinada por el jurado constituido por los doctores Francisco Miró Quesada, Juan Bautista Ferro y Antonio Peña Cabrera. Cada uno de ellos me ha hecho correcciones y sugerencias que lo han mejorado en mucho. Asimismo, considero que si en algún caso he mantenido un punto de vista a pesar de haber sido observado será el acto de la sustentación ocasión para dar cuenta de ello.

Esta exposición consta de una introducción y tres secciones. En la introducción se plantea el problema epistemológico suscitado por la imposibilidad de formular leyes científico-empíricas necesariamente verdaderas y con contenido informativo sobre los hechos. Esto ha conducido a los epistemólogos a introducir el concepto de probabilidad para referirse al grado en que ha sido corroborada por la experiencia una ley científica. Sin embargo, 'probabilidad' no es una palabra unívoca, por tanto un análisis de su contenido significativo dentro del lenguaje científico resulta pertinente. Asimismo, en razón de que en los sistemas axiomáticos 'probabilidad' es un término operacionalmente definido como un valor sujeto a ciertas condiciones el esclarecimiento de su significado exacto conduce a un estudio de los modelos propuestos para dichos sistemas.

En la primera sección se analiza el modelo conocido como frecuencial sobre la base de las tesis de Reichenbach y von Mises. Se exponen los principales argumentos de los frecuencialistas, indicándose luego las consecuencias de sus afirmaciones ,algunas objeciones y contra objeciones. En general puede afirmarse que el modelo frecuencial es bastante matematizado y es el comunmente usado por la Estadística matemática. Esto último debido a las posibilidades de aplicación brindadas por el concepto de límite de la frecuencia relativa en una sucesión indefinidamente prolongable. Dicho concepto es el meollo de la tesis frecuencialista y su limitación fundamental e no poder dar cuenta satisfactoriamente de la probabilidad lógica, esto es, de la probabilidad de una hipótesis.

En la segunda sección se aborda el modelo de rango cuyo teórico principal es Carnap. También se exponen los argumentos básicos, sus consecue cias y objeciones. El modelo de rango es de orientación logicista, debido a ello su descripción demanda una previa exposición de los sistemas formalizados del tipo £ propuestos por Carnap. El concepto fundamental es el de grad de confirmación que es definido semánticamente como una función de medida en tre *rangos*. La noción de rango, relativa necesariamente a un sistema £, está estrechamente ligada a la de descripción del estado de un sistema £ con respecto al dominio de individuos de éste. Se incluyen detalles acerca del comportamiento de la función de medida antes mencionada y sobre su computabilidad efectiva. La objeción fundamental a este modelo es que satisface a un si tema axiomático del cual se puede derivar una contradicción según lo indica Popper en uno de los apéndices de su obra <u>La lógica de la investigación cien tífica</u>.

En la tercera sección se expone un sistema formal de probabilida des sin interpretar . Su autor es Reichenbach y se encuentra contenido en la obra <u>The Theory of Probability</u>. Aunque este es un sistema similar a los ordinariamente usados en el Cálculo de las probabilidades , tiene la peculiaridad de mostrar la aplicabilidad de las tautologías de la lógica proposicional co mo reglas de transformación dentro del Cálculo de las probabilidades. Además tiene la virtud de hacer explícitos conceptos generalmente supuestos por los trabajos estrictamente matemáticos.

Lima, setiembre de 1,970.

INTRODUCCION

Comenzaremos este trabajo con unas líneas tomadas de la introducción que hizo Kant a su Crítica de la razón pura.

> "Es bien fácil mostrar que realmente hay en el conocimiento humano juicios de un valor necesario y en la más estricta significación universales; por consiguiente, jucios puros a priori. Si se quiere un ejemplo tomado de las ciencias mismas, no hay más que reparar en las proposiciones matemáticas".&

La cita anterior prueba que el filósofo de Koenigsberg creyó que existían formulaciones científicas, en cierto modo, absolutamente verdaderas. Universales en el sentido de cumplirse en todos los casos posibles y necesarias porque su negación conducía a contradicción. Las formulaciones que gozaran de las propiedades anteriores merecían el más alto grado de creencia, esto es, la certeza.

Otros filósofos, entre ellos principalmente Descartes, no calificaron de fácil la tarea de encontrar afirmaciones necesariamente verdaderas, al contrario, para ellos ella era la misión fundamental del quehacer filosófico. Sin embargo, un siglo y medio más tarde, Kant planteaba el problema en términos distintos: admitiendo la existencia de formulaciones necesariamente verdaderas, la cuestión era dar una explicación satisfactoria a cómo eran ellas posibles.

Desde Kant a nuestros días muchos son los avances logrados. No sólo se ha alcanzado una comprensión más rigurosa de la estructura del mundo sino también un enjuiciamiento más certero de los alcances y limitacio-

&Kant, Manuel; Crítica de la razón pura, Editorial Losada, Buenos Aires 1960, volumen I, p. 147.

nes del conocimiento mismo. Se ha demostrado, por ejemplo, que la necesidad de las proposiciones de la geometría euclideana sólo se produce con respecto a un sistema axiomático particular, que no es más consistente que muchos otros, lógicamente, igualmente válidos. Asimismo, la validez universal de la matemática ha sido discriminada de su aplicabilidad, lo que no tuvo en cuenta la tesis kantiana.

Los resultados indicados no han dado lugar a que se considere imposible la existencia de formulaciones necesariamente verdareras, pero han permitido precisar mejor el problema. De esta manera, con el desarrollo de la lógica moderna, se ha llegado a la conclusión de que hay al menos un tipo de afirmaciones necesariamente verdaderas las cuales son conocidas como tautologías[&]; ellas podrían ser llamadas absolutamente verdaderas.

Pero saber que existen formulaciones tautológicas no es suficiente en relación con las exigencias del pensamiento contemporáneo, pues se debe también tener en claro si ellas incrementan nuestros conocimientos sobre el mundo. Al respecto Wittgenstein[&&] había señalado una limitación importante, esta es que las tautologías, aunque son necesariamente verdaderas, no proporcionan información alguna sobre el mundo, vale decir, son vacías.

La tesis de Wittgenstein fue posteriormente corroborada, como

[&] Se denominan tautologías a las fórmulas de n variables de la lógica de las proposiciones que son verdaderas para sus 2^n arreglos de valores verdadero-falso.

De las fórmulas de la lógica funcional de primer orden que contienen cuantificadores y son cuantificacionalmente válidas, sólo algunas son tautologías. Es posible aplicar un mismo método, en lo fundamental, para decidir si una fórmula de la lógica de las proposiciones es tautología y si una fórmula de la lógica funcional de primer orden es cuantificacionalmente válida (Vid. Smullyan; First Order Logic).

demostraremos luego, por el desarrollo de la teoría de la información, disciplina que debemos principalmente a Claudio Shannon, quien, usando el cálculo de las probabilidades, ideó una fórmula capaz de computar la cantidad de información transmitida por un grupo de signos interpretados como mensajes; dicha fórmula es

$$H = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$$

Probar que la fórmula anterior corrobora las afirmaciones de Wittgenstein[&] sobre las tautologías demanda que reparemos en su forma. La cantidad de información H por cada signo i es igual a la eliminación de las probabilidades de los i signos, esto es, la fórmula de Shannon es un artificio eliminador de probabilidades. Su valor es función directa del número de probabilidades que se eliminan y el signo '-' da expresión matemática a la idea de eliminación. Una tautología, al contrario, es un artificio que incluye toda las probabilidades correspondientes a todas sus interpretaciones posibles, en breve, se cumple cuando la fórmula de Shannon es inaplicable. Además, si se pensara a una tautología como a un mensaje posible, en tanto que ofrece el máximo grado de seguridad, su probabilidad sería igual a 1 y $H = 0$.

El que las tautologías sean necesariamente verdaderas y -de acuerdo a los resultados brindados por la teoría de la información- a la vez vacías, plantea una situación que parece paradójica. Por un lado es objetivo del conocimiento lograr formulaciones cuya verdad sea irrecusable, por otro lo es enriquecer más su contenido con información sobre la realidad. Las tautologías cumplen lo primero, a precio de no poder, en princi-

[&&] Wittgenstein, Ludwig; Tractatus logico philosophicus, Routledge and Kogan Paul, Londres 1966, Vid. 4.462.

pio, satisfacer lo segundo. Esto nos obliga a pensar que si el objetivo fundamental del conocimiento científico-empírico es darnos información adecuada sobre los hechos del mundo, entonces las leyes científico-empíricas no pueden ser tautologías. Por tanto, dichas leyes no pueden ser necesariamente verdaderas como lo pretendió Kant respecto de las de la física. Sin embargo, cabe una pregunta ¿ y las tautologías no son acaso parte de un sistema científico? A ella responderemos afirmativamente, especificando que en este caso se trata de un sistema científico vacío, como los de la lógica o la matemática pura, cuyas formulaciones carecen de contenido fáctico. A las ciencias constituidas por enunciados con contenido fáctico, los cuales decididamente no pueden ser tautologías, las denominamos empíricas para diferenciarlas de las llamadas ciencias formales.

Lo expuesto nos autoriza a sostener que, a la luz de las investigaciones contemporáneas, es fácil construir una formulación necesariamente verdadera, pues podemos obtener el número de tautologías que se desee. Sin embargo, ello nos coloca ante una situación límite debido a que cuando tenemos a mano una tautología todo lo que sabemos es, simplemente, que es una tautología. De esta suerte nuestro ideal de conocer al máximo con la seguridad máxima se ve frustrado. Si se alcanza lo primero, nuestros enunciados ya no serán necesariamente verdaderos; y si se alcanza lo segundo, nuestro conocimiento sobre el mundo será nulo. Por consiguiente, el anhelo kantiano de una ciencia integrada por enunciados sintéticos necesariamente verdaderos, hasta donde nosotros sabemos, ha fracasado.

En consecuencia, si las leyes científico-empíricas, que nos proporcionan conocimientos sobre el mundo, no son necesariamente verdaderas, entonces es oportuno preguntarse qué son. Al respecto, el pensamiento epistemológico contemporáneo ha contestado, casi unánimemente, <u>probables</u>. Por tanto, una investigación sobre el significado de 'probabilidad' resulta de importancia primera.

A continuación precisaremos dentro de qué marco interesa al análisis filosófico de la ciencia el examen de 'probabilidad'.

Tomaremos como sistema de referencia general el lenguaje científico. Dentro de él 'probabilidad' se usa en los dos siguientes niveles: (i) el de los sistemas axiomáticos; y (ii) el de la aplicación de los sistemas axiomáticos. El nivel (i) no demanda que se establezca explícitamente el significado de 'probabilidad', pues resulta suficiente dar una definición operacional para dicha palabra diciendo, por ejemplo, que denota una función de dos argumentos a la cual se le puede asociar cualquier número real del intervalo abierto (0 - 1). Este nivel es el de la matemática pura dentro de la cual el desarrollo de las funciones de probabilidad es un capítulo de la teoría de las funciones medibles en conjuntos de puntos. El nivel (ii) es el de la interpretación de los sistemas axiomáticos proporcionados por (i), remplazando las variables por valores correspondientes a hechos empíricos. En este nivel se encuentran las ciencias empíricas cuyos enunciados son suceptibles de tener la forma de una expresión del cálculo de las probabilidades. Entre estas ciencias, que pueden correctamente ser entendidas como aplicadoras del cálculo de las probabilidades, se encuentran la Física, Genética, Psicología, Ciencias Sociales, etc.

El nivel (ii) sí requiere una primera aproximación al significado de 'probabilidad'. La tarea de sustituir con datos empíricos las variables de las expresiones de un sistema axiomático cualquiera S_1 , supone la existencia de un método para determinar tales datos. Este método sólo se conoce cuando se ha precisado el tipo de relación denotada por 'probabilidad'. Si se asume, por ejemplo, que la relación anterior es la de frecuencia relativa en una sucesión de acontecimientos, entonces para decidir si tal relación es o no la adecuada se traducen los axiomas del sistema S_1 en términos de ella. Si los enunciados así obtenidos son verdaderos, entonces se afirma que la relación en cuestión es el contenido semántico de 'probabilidad'. Consecuentemente, los enunciados que expresen la relación de frecuencia relativa convertirán en verdaderos los axiomas de S_1 . Un conjunto de dichos enunciados se denomina un modelo de S_1 . La construcción de modelos es el medio que permite aplicar los sistemas aximáticos en las ciencias empíricas.

Al análisis filosófico le compete el estudio de ambos niveles. El de (ii) porque la relación que satisfacen los modelos de un sistema cualquiera -a la cual llamaremos genéricamente modelo- en el mejor de los casos agota la definición implícita de 'probabilidad' dada por los axiomas de dicho sistema, pero pueden quedar pendientes otros conjuntos de enunciados científicos que no cumplan la mencionada relación, aunque contengan con sentido la palabra 'probabilidad'. Interesa el estudio de (i) porque la mayor parte de los enunciados de probabilidad del lenguaje científico no son otra cosa que interpretaciones de expresiones de los sistemas axiomáticos.

El presente trabajo pretende atender a los dos aspectos antes señalados. En las dos primeras secciones exponemos el debate suscitado por la insuficiencia de un sólo modelo para dar cuenta de todos los enunciados científicos de probabilidad. En la tercera sección presentamos un sistema axiomático de probabilidad. Lo hemos elegido por tener la peculiaridad de ser lógico-métrico.

SECCION I

1.0 . Hemos indicado que nuestra investigación filosófica sobre el significado de 'probabilidad está ligada al examen de los modelos de los sistemas axiomáticos de probabilidad. Para tratar este asunto con el debido detenimiento definiremos previamente alguno términos a fin de darles sentido unívoco dentro de la presente exposición.

Aunque habitualmente se usa la palabra 'hecho' suponiendo que existe acuerdo sobre cual es su significado, nosotros preferimos evitarla a causa de que puede dar lugar a ambigüedades. Nos referimos directamente a acontecimientos y a eventos en el sentido a continuación explicado, que hemos tomado, salvo algunas ligeras variantes, de <u>La lógica de la investigación científica</u> de Karl Popper [&]. Iniciaremos nuestra explicación con el siguiente ejemplo :

(a) Al lanzarse el dado Y sobre la mesa de juego de la casa Nº 1 de la calle 15 de la ciudad de Lima, a las 3 p.m. del 2 de febrero de 1970, se obtuvo un as.

Diremos que tal enunciado (a) es de la forma p_k , de tal manera que el sub-índice k denota a un nombre de individuo, coordenadas espacio-temporales y un atributo. En este caso, k denota: (1) al nombre Y; (2) la dirección y la ciudad; (3) la fecha y la hora; (4) el atributo de ser un as. Es claro que o un enunciado de la forma p_k es singular.

Con la expresión A_k nos referiremos a la clase de todos los enunciados lógicamente equivalentes a p_k y llamaremos a esta clase el acontecimiento A_k. Los matemáticos llaman a A_k una clase de equivalencia y a p_k, que lógicamente pertenece a A_k, lo denominan elemento representativo de dicha clase.

&- Popper, Karl; <u>La lógica de la investigación científica</u>; Ed. Tecnos, Madrid,1962; Vid.párrafo 21, p. 80.

Para precisar el sentido en el que hablamos de evento tengamos en cuenta además a los enunciados:

(b) Al lanzar el dado Y en la mesa de juego de la casa número 10 de la calle 15 de la ciudad de Lima, a las 3 y 1' p.m. del 2 de febrero de 1970, se obtuvo un as .

(c) Al lanzar el dado Y en la mesa de juegos de la casa número 10 de la calle 15 de la ciudad de Lima, a las 3 y 2' p.m. del 2 de febrero de 1970, se obtuvo un cuatro.

Consecuentemente , el enunciado (b) será de la forma p_r y A_r su respectiva clase de equivalencia o acontecimiento; el enunciado (c) será de la forma p_s con su correspondiente acontecimiento A_s . Decimos que los acontecimientos A_k , A_r y A_s son distintos porque $k \neq r \neq s$. Asimismo, p_k , p_r y p_s expresan acontecimientos distintos.

Un evento es una clase de acontecimientos A_k , A_r , A_s ,...etc. que difieren solamente en su sub-índice y lo denotamos por (A). De lo anterior deducimos que un evento es lo común a una clase finita o no de acontecimientos. Por tanto, lo denotado por <u>k</u>, <u>r</u> y <u>s</u> no puede ser lo determinante del evento (A) sino lo significado por 'Al lanzarse el dado Y', que nos permite hablar del evento "lanzamiento del dado Y". Para considerar a <u>k</u>, <u>r</u> y <u>s</u> distintos es suficiente que difieran en uno de sus componentes denotados.

Podría sostenerse que si Y es un dado no "cargado", entonces su lanzamiento es similar al de cualquier otro dado del mismo tipo; por consiguiente, sería suficiente hablar del evento "lanzamiento de un dado no "cargado". Sin embargo, aunque la formulación elíptica generalmente es lícita, preferimos la propuesta por razones de comodidad en la ejecución de operaciones. Según las necesidades se debe graduar la precisión con que se formula un evento. La condición es que <u>k</u> , <u>r</u> y <u>s</u> tengan en común entre sus n elementos denotados, al menos uno y a lo más n-1 . La última limitación tiene como finalidad evitar que se confunda un evento con un acontecimiento.

En adelante nos interesarán eventos cuyos acontecimientos manifiesten los siguientes comportamientos: (i) varían en sus coordenadas temporales a manera de sucesiones y también con respecto a un atributo, de tal suerte que se sabe con exactitud si un acontecimiento posee o no el atributo en cuestión; (ii) varían en sus coordenadas espaciales, nombre de individuo y atributo. Si pertenecen a (i), mantienen constantes el nombre de individuo y las coordenadas espaciales. Si pertenecen a (ii), mantienen constantes las coordenadas temporales.

Las restricciones anteriores son consignadas debido a la precisión con que deben hacerse e interpretarse los cálculos cuando se aplica un sitema axiomático de probabilidades. Un ejemplo que ilustra (i) es el evento "lanzamiento del dado Y". Como ejemplo de (ii) citamos "nacimiento de un ser humano", que puede ser mejor formulado en términos de "nacimientos de seres humanos en el intervalo de tiempo t". Si el caso lo requiere puede lograrse, como anotáramos antes, mayor precisión.

1.1 . EL MODELO FRECUENCIAL.

1.1.1 .. Haremos nuestro el criterio de von Wright[&] para clasificar los modelos que se usan para interpretar los sistemas axiomáticos de probabilidades. Según este autor dichos modelos son de dos clases; los frecuenciales-estadísticos y los de rango. Carnap,[&&] a quien han preocupado mucho estas cuestiones, también reduce todos los significados a 'probabilidad', dentro

& von Wright, George Henrik; The logical problem of induction; Basil Blackwell, Oxford, 1965; Vid. cap. VI, párrafo 2.

&& Carnap, Rudolf; Logical foundations of probability; The University of Chicago Press, Chicago, 1950; párrafo 9, p. 25.

del contexto científico, a dos conceptos : el de grado de confirmación y el de frecuencia relativa. Estos dos conceptos, como veremos luego, equivalen lógicamente a los modelos de rango y frecuencial, respectivamente, de von Wright. Señalamos, como una apreciación con cargo a ser fundamentada en el transcurso de nuestra exposición, que el modelo de rango es acentuadamente lógico *mientras* el frecuencial es eminentemente matemático.

1.1.2 . Pasemos ahora a presentar al modelo frecuencial-estadístico, al que llamaremos simplemente modelo frecuencial (en el párrafo anterior ya hemos optado por esta abreviación). Entre los primeros en sugerir un modelo frecuencial para la adecuada interpretación del entonces cálculo de las probabilidades, se citan los nombres de Poisson en 1837, Cournot en 1843, George Boole en 1854. Fue, sin embargo, John Venn quien en 1866 afirmó por primera vez que el concepto de límite de la frecuencia relativa satisfacía los axiomas del cálculo de las probabilidades de su época. Posteriormente, en 1919, Richard von Mises dio una formulación completa a la idea de Venn, introduciendo, además, la noción de colectivo para dar con respecto a ella una definición de probabilidad. Reichenbach usó el concepto de límite de la frecuencia relativa, de manera sistemática, desde 1931, aunque parece que ya lo había planteado en 1915, según anota Carnap[&]. Un desarrollo similar es debido a Fisher en 1931. Asimismo la mayor parte de trabajos y textos de estadística usan el modelo frecuencial, razón por la que se le llama estadístico.

Al modelo expuesto en la presente sección lo llamaremos "modelo frecuencial clásico", cuyos teóricos más conocidos son von Mises y Hans Reichenbach. De esta manera diferenciamos nuestro modelo de otros análogos propuestos por Popper y Fisher. Asimismo, anotamos que modelos, aparentemente

[&] Carnap, idem, párrafo 42, p. 187.

muy distintos del nuestro, como el "briarcico" de Braithwaite[&], están próximo a ser frecuenciales .Este último elimina algunas dificultades de la teoría d Mises, generadas por los conocidos axiomas de aleatoriedad y convergencia,pe ro se basa en una "aritmética de razones de clase", compatible con la noción de frecuencia relativa.

Con ligeras modificaciones, nuestro "modelo frecuencial clásico" es el propuesto por Reichenbach en su libro The theory of probability. Antes de justificar esta elección señalaré lo significado con 'ligeras modificacio nes'.

El modelo descrito por Reichenbach es más general que el aquí desarrollado, pues admite tanto la "interna implicación de probabilidad"[&&] como la "externa implicación de probabilidad". Aclarando lo último, indicamos que Reichenbach considera la estructura de los enunciados de probabilidad, usados en los lenguajes no formalizados, suceptible de ser expresada rigurosamente por la siguiente fórmula lógica que no es analítica:

$$\text{(f.1)} \quad (x) \quad (y) \left[f(x) \;.\, c(x,y) \xrightarrow[p]{} g(y) \right]$$

En (f.1) el operador '$\xrightarrow[p]{}$' indica que no se trata de una implicación analítica. El componente 'c(x,y)' señala una relación de "uno a uno" del dominio de f(x) al de g(y), sin suponer indentidad entre las variables 'x' , 'y'.Esto significa que (f.1) puede cumplirse en el caso en que 'x' 'y' denoten a distintos individuos. Trabajar con esta generalidad demanda que para aplicar (f.1) a la mayoría de los casos relevantes se le añadan c.

& Braithwaite, Richard; La explicación científica; Ed. Tecnos, Madrid, 1965; Vid. capítulo quinto, p.135 - 172.

&& Reichenbach, Hans; The theory of probability; University of California Press, San Francisco, 1949; Vid.parágrafo 9, p. 48.

algunas condiciones especificadoras como, por ejemplo, que el dominio de f(x) sea una sucesión compacta. Por tanto, para evitar dificultades técnicas y pensando que ello no margina cuestiones fundamentales, hemos reducido la relación c(x,y) a una relación de identidad. Así (f.1) se reduce a :

$$(\text{ f.2 }) \quad (x) \left[f(x) \underset{p}{\dashrightarrow} g(x) \right]$$

La fórmula (f.2) expresa la "implicación de probabilidad" supues en nuestra exposición. Por esta razón la definición de 'probabilidad', proporcionada por el modelo luego desarrollado , se encuentra íntimamente ligadà a relaciones entre atributos de los mismos individuos.

La segunda modificación, digna de mencionarse, es que nuestra presentación del "modelo frecuencial clásico" la desarrollamos a partir de la postulación de una definición rigurosa de 'evento'. Ella supone el establecimiento de una clase de clases de equivalencia denominada cuociente y de una clase de los enunciados representativos de cada elemento del cuociente. Reichenbach, aunque usa la palabra 'evento', no precisa su significado y presenta su modelo independientemente de dichos detalles.

Por otro lado, para justificar nuestra preferencia por el modelo de Reichenbach, señalamos :

(i) el modelo de von Mises es menos general que el de Reichenbach. La excesiva particularidad del de von Mises se traduce en la exigenci de una clase de acontecimientos denominada colectivo, cuya definición conlleva el uso de los axiomas de convergencia y aleatoriedad (a ellos haremos posteriormente alusión más detallada). El modelo de Reichenbach contiene el de von Mises como a un caso particular. Esto se produce cuando la clase de referencia es una "sucesión normal".

(ii) Reichenbach ha generalizado su modelo frecuencial para expresar en él a los enunciados de probabilidad sobre enunciados. Esta extrapolación permite dar al discutido concepto de probabilidad lógica una significación frecuencial. El desarrollo del planteamiento que identifica a la probabilidad matemática con la probabilidad lógica se encuentra en el capítulo 10, parágrafo 77 de The theory of probability. Una argumentación adiciona se da en Experience and prediction, parágrafo 33.

Pasaremos, inmediatamente, a describir las características fundamentales del "modelo frecuencial clásico".

1.1.2.1 . Los epistemológos que proponen el "modelo frecuencial clásico" para un sistema aximático de probabilidades, asumen que 'probabilidad' denota una relación entre dos enunciados referentes el primero a un evento y el segundo a una sub-clase propia o impropia de dicho evento. Nosotros, por razones de comodidad expositiva, hablaremos directamente de una relación entre clases. Esta relación, suponiendo un orden normal en su notación, no es sistemática.

1.1.2.2 . La definición que hemos dado de 'evento' corresponde a lo que los matemáticos denominan una clase finita o no cuyos miembros son clases de equivalencia. A fin de explicar la semejanza de los conceptos anteriores con los de los frecuencialistas, asumamos, por ejemplo, que son dadas las clases de equivalencia A_r , A_s , A_t , ...etc. y que los elementos representativos de cada una de ellas difieren entre sí solamente en el individuo que denotan, luego, de acuerdo al conocido axioma de selección de Zermelo,[&]

[&]Existen diversas formulaciones del axioma de selección de Zermelo, al respecto puede verse una de Kleene expuesta en su Mathematical Logic, John Wiley & Sons, Inc, New York, 1968, p.190. Esta, traducida libremente, es: "Dado un conjunto S de conjuntos disjuntos no vacíos, existe un conjunto C el cual tiene como sus miembros un elemento y sólo uno de cada miembro de S. (S es un conjunto de conjuntos disjuntos si ningún par de miembros, distintos entre sí, de S tiene un elemento común a sus componentes)".

es posible tomar un enunciado represetativo de cada una de las clases de equivalencia pertenecientes al evento y formar una clase de enunciados representativos, a la cual convendremos en llamar clase cuociente, debido a que está constituida por los elementos representativos de cada miembro del cuociente matemático, en sentido estricto, para este contexto. Esta última clase es equipotente con cualesquiera de las clases de objetos entre las cuales Reichenbach [&] establece la relación de frecuencia relativa, con la diferencia de que nosotros hacemos explícito que cada objeto es, dentro del lenguaje científico, descrito por un enunciado de la forma p_k. Asimismo, desde la perspectiva frecuencial, es indiferente trabajar, a este nivel, con conjuntos de objetos o conjuntos de enunciados.

De acuerdo al teorema matemático de proyección canónica al cuociente, toda propiedad demostrada para el cuociente, entendido éste en el sentido arriba indicado, puede ser aplicada a la clase de clases de equivalencia (cuociente matemático estricto), vale decir, al evento. La razón es que dado un enunciado representativo, se sigue de él la existencia de una única clase de equivalencia representada. Si 'probabilidad' denota un tipo de relación entr un evento y una sub-clase de él y puesto que dicha relación puede, sin inconvenientes, ser definida para el cuociente; luego, conversamente, los resultados obtenidos en este último pueden ser generalizados al evento que sea el caso.

Anotamos que los teóricos del "modelo frecuencial clásico" aplican, generalmente, la relación denotada por 'probabilidad' a clases infinit Si la mencionada relación se estableciera, como un caso particular, en una clase finita de clases de equivalencia, entonces el cuociente resultante sería equipotente con una clase de objetos para lo cual Reichenbach establece, (sentido estricto, la relación de frecuencia relativa. Es importante preci-

[&] Reichenbach; idem. parágrafo 16. p. 69.

sar que, en este contexto, 'probabilidad' no denota rigurosamente la misma relación para clases infinitas y finitas. La variante es que en el primer caso debe existir un valor límite para la secuencia de frecuencias relativas que tiende a <u>infinito</u>.

1.1.2.3.. De acuerdo al "modelo frecuencial clásico" la relación que expresa un enunciado de probabilidad es de dos componentes, el primero se denomina clase de referencia y el segundo clase atributo. Postulamos que la primera pertenece a una clase de clases que son equipotentes con cuocientes y, por tanto, lo demostrado para ellas puede ser expandido inmediatamente a eventos. Usaremos como símbolos para clases las letras mayúsculas A,B,C,D,.. ,etc.. Supondremos, además, que estas clases tienen sus elementos ordenados de alguna manera. Por facilitar la explicación, nos referiremos primero a clases finitas.

El número cardinal de cualquier clase lo denotaremos por :

$$\text{(f.3)} \qquad \overset{n}{\underset{i=1}{N}} (x_i \in A) .$$

La fórmula (f.3) se lee: el número de elementos pertenecientes a A entre 1 y n. Evidentemente el valor de N es el número cardinal de A. El componente ' x_i ' denota o enunciados de la forma p_k u objetos (o fenómenos). Debido a la limitación expresada por la condición (f.2) y debido a que nos circunscribiremos a sucesiones compactas, tendremos N = n siempre que tenga sentido hablar de número cardinal. Aclaramos que una sucesión es compacta cuando satisface;

$$\text{(f.4)} \qquad (i) (x_i \in A)$$

La intersección de clases la denotaremos por (A.B) y la suma o unión de clases por (AvB). Además, podemos introducir una abreviación mediante la siguiente definición :

$$(f,5) \qquad \underset{i=1}{\overset{n}{N}} (x \in A) = \text{Df. } N^n (A)$$

En virtud de (f.5) los números cardinales de la unión e intersección de clases se escriben N^n (AvB) y N^n (A.B), respectivamente. Hacemos constar que la notación de esta sección la hemos tomado de Reichenbach.[&]

1.1.2.4 . La relación denotada por 'probabilidad' es tal que permite asociar a todo enunciado de probabilidad con un número real del intervalo abierto (1,0). La mencionada relación es denominada "relación de frecuencia relativa" y en nuestra notación se expresa por ;

$$(f.\underline{6}) \quad F^n(A,B) = p$$

La fórmula (f.6) se lee: la frecuencia relativa del atributo B sobre el número n de elementos de A es igual a p. La letra 'p' se refiere a un valor numérico calculable por una equivalencia luego señalada, la misma que permite comprender la validez de $0 \leqslant p \leqslant 1$. De otra parte, A puede ser asumida como la clase de los enunciados que satisfacen la función proposicional f(x) y B, de la misma manera, la clase de los enunciados que satisfacen g(x); si, además, B es una sub-clase propia o impropia de A, entoces hemos logrado expresar la frecuencia relativa como una relación entre dominios de funciones proposicionales definidas para una misma variable de individuo.

1.1.2.5 . El valor p de la frecuencia relativa $F^n(A,B)$ se determina como el cuociente de una fracción que en el numerador precisa el número de elementos de A que también son B y en el denominador el número de elementos de A. En consecuencia tenemos;

$$(f.7) \quad F^n(A,B) = \frac{N^n(A.B)}{N^n(A)} .$$

[&]Reichenbach; idem. parágrafo $\underline{16}$ pp. 67-76.

La fórmula (f.7) permite computar la proporción de elementos de B que existe en A. Nuestra postulación hecha en el parágrafo cifrado 1.1.2.3 de que la clase A es equipotente con un cuociente obtenido por selección, hace innecesario añadir que el valor de (f.7) es determinado a condición de que A sea no vacía, pues el axioma de selección de Zermelo da por suspuesta la existencia de al menos un elemento en cada clase de equivalencia del evento. Braithwaite&, denomina a la frecuencia relativa, debido a su forma fraccionaria, una "razón de clase".

Lo expresado por (f.7) no presenta dificultad alguna mientras nos restrinjamos a clases finitas, sin embargo la relación denotada por 'probabilidad', según la tesis frecuencialista, no siempre coincide con la de frecuencia relativa tal y como ha sido definida antes. La diferencia se explica porque se pretende que 'probabilidad' denota principalmente una relación entre secuencias infinitas. Por tanto, interesa no el valor de la frecuencia relativa sino el valor del límite de la frecuencia relativa en una secuencia que tiende a infinito. La justificación, para acudir a este recurso matemático, es que sólo con respecto a clases infinitas 'probabilidad'denota algo interesante y que haga factible la predicción. En la aplicación del cálculo de las probabilidades a un evento tan simple como las tiradas de un dado, no sería fecundo postular que hay un número finito de tiradas cuando podemos concebir la sucesión de las tiradas indefinidamente larga.

Para proseguir nuestra tarea, diremos que cualquier enunciado de probabilidad tiene la forma:

$$(f.8)\ P(A,B) = p$$

La fórmula (f.8) se lee: la probabilidad que desde A se siga B es p. Luego, debido a que hemos precisado que 'probabilidad'denota una relación especialmente importante en secuencias infinitas, tenemos :

& Braithwaite; idem. p. 142.

$$(f.9)\quad P(A,B) = \lim_{n \to \infty} F^n(A,B)$$

El sentido de (f.9) es indicar que cuando pueda establecerse el valor límite de la frecuencia relativa en una secuencia tan larga como se quiera, entonces será posible predecir, para cualquier prolongación de la secuencia, que el valor de la frecuencia relativa permanecerá dentro de un intervalo muy pequeño. Supongamos que prolongamos la secuencia en cuestión hasta s elementos, vale decir, hacemos a la clase de referencia de s elementos $(s > n)$. Si previamente hemos determinado que el valor del límite es h^n, esto es

$$\lim_{n \to \infty} F^n(A,B) = h^n \quad .$$

Luego podemos afirmar que cualquier valor futuro de la frecuencia cumplirá necesariamente la siguiente condición:

$$(f.10)\qquad h^n - k \leqslant h^s \leqslant h^n + k$$

La condición (f.10) puede ser formulada más brevemente por:

$$h^s \quad h^n \pm k \quad ,$$

que se lee: h^s pertenece al intervalo $h^n \pm k$, siendo k, obviamente, en los dos casos precedentes, una cantidad muy pequeña. Una de las tesis fundamentales, sino la principal, del pensamiento epistemológico de Reichenbach[&] es que (f.10) constituye el "principio de inducción" y que, en consecuencia, soluciona el tradicional problema de las inferencias inductivas, pues permite predecir certeramente a las ciencias empíricas cuando las secuencias tinen un límite determinable.

[&] Sobre éste importante asunto: Vid. Reichenbach; idem. parágrafo 84 pp. 429 - 482. Además, del mismo autor, Experience and prediction; The University of Chicago Press, 1961; parágrafo 38, p. 340 y ss.

El debate suscitado por la postulación del "principio de inducción" fue muy animado y aún sigue abierto. Su autor lo defendió con vehemencia de críticas como la que afirmaba que dicho principio presuponía la uniformidad de la naturaleza y se apoyaba, consecuentemente, en una hipótesis metafísica. Nosotros, por ahora, nos limitaremos a la mención anterior.

1.1.3 . Consecuencias de la postulación del "modelo frecuencial clásico".

1.1.3.1 . La palabra 'probabilidad' denota principalmente una relación definida para elementos de eventos. Debido a que los miembros de la clase atributo pertenecen en su totalidad al evento de referencia, la fórmula (f.7) puede ser simplificada a :

$$\text{(f.11)} \quad F^n = \quad 1/n\ N^n(B) \quad .$$

Por consiguiente, cuando $N^n(A) = N^n(B)$ el valor de $F^n(A,B) = 1$. Para secuencias indefinidamente prolongables, si $\underline{(A)} = \underline{(B)}$, luego Lim. $F^n(A,B) = 1$. Si B es una clase vacía, $F^n(A,B) = 0$. Por tanto $0 \leqslant F^n(A,B) \leqslant 1$.

1.1.3.2 . El valor de $F^n(A,B)$ † para secuencias finitas o no, indica sólo la proporción de miembros de A que son también B pero no hace especificaciones sobre ningún miembro en particular. El valor de la frecuencia relativa dice cuantos pero no cuales. En el lenguaje natural se usa a menudo 'probabilidad' en enunciados que exhiben nombres individuales. Ellos serán considerados formulaciones inadecuadas las que deben ser traducidas a otras que hagan explícitos el evento de referencia y el atributo, de tal suerte que desaparezca todo nombre individual. En la medida que un enunciado de probabilidad afirma el valor de una frecuencia relativa o de su límite, no puede ser refutado ni confirmado por un ejemplo particular. En el caso de los enunciados

† Nos referiremos en adelante, sólo al valor de $F^n(A,B)$. El lector interpretará este valor como el del límite cuando sea el caso.

referentes a sucesiones infinitas - que son las leyes científico-empíricas - ningún conjunto finito de observaciones puede refutarlos ni confirmarlos completamente. Como esta característica es imcompatible con la necesidad de decidir enunciados, se ha juzgado oportuno incluir reglas adicionales, esencialmente metodológicas, como la de las "desviaciones reproducibles" de Karl Popper +, para encarar este problema.

1.1.3.3.. La relación de frecuencia relativa es empírica, pues su valor o el de su límite se determina en base a observaciones. Lo anterior significa que un enunciado de probabilidad es fáctico y no analítico. La información empírica necesaria para establecer un enunciado de probabilidad es de naturaleza estadística. En razón de que la cantidad de información puede ser incrementada por nuevas observaciones, el valor de un enunciado de probabilidad siempre es rectificable a la luz de los nuevos datos. Asimismo, un sistema axiomático de probabilidades se encuentra al margen de cómo se determina empíricamente el valor p de (f.8); lo que le compete a éste es: dada la existencia de ciertos valores de probabilidad, derivar de acuerdo a reglas lógicas otros. Lo anterior no obsta que los teoremas de un sistema aximático de probabilidades sean analíticos aunque puedan ser interpretados usando enunciados fácticos. Todo lo que afirma un teorema es que ciertos valores de probabilidad serán determinables siempre y cuando otros, denominados probabilidades básicas, sean dados.

1.1.3.4 . Los enunciados de probabilidad de la forma P(A,B) asumen un valor sólo cuando se refieren a sucesiones fácticas convergentes, en otras palabras, sucesiones para las cuales existe un límite. Esta peculiaridad no ofrecería dificultad si se trabajara con sucesiones matemáticas convergentes en las que, por ser generadas por una regla, siempre es calculable el valor del límite. Sin embargo, no toda sucesión matemática es convergente

+ Karl Popper; idem, parágrafo 68, p. 189.

y no puede afirmarse categóricamente que un evento corresponde a una sucesión fáctica con las características de una sucesión matemática convergente. En consecuencia, un sistema axiomático de probabilidades es aplicable solamente bajo el supuesto de que existan sucesiones fácticas compatibles con sucesiones matemáticas convergentes. No hace falta asumir, como algunos críticos lo han apuntado, el principio de uniformidad de la naturaleza, pues lo dicho no excluye el reconocer la existencia de casos en los que un sistema axiomático de probabilidades es inaplicable.

En atención a la condición expresada en el parágrafo cifrado con 1.1.2.3, la fórmula (f.7) se da sobre el supuesto de que los elementos de A y B se encuentran en cierto orden. Debido a que las técnicas matemáticas para calcular el valor del límite toman en cuenta, como factor relevante, el orden de la sucesión entonces si se modifica el orden puede cambiar el valor del límite.

El valor de un enunciado de probabilidad P(A,B) se mantiene constante si son constantes su clase de referencia y su atributo. Si en P(A,B)=p se mantiene constante el atributo pero se modifica el evento, el valor de p puede modificarse. La alteración anterior, de producirse, no atentaría contra la unicidad del valor de p porque en tal caso, no se trataría del mismo enunciado.

1.1.3.5 . La cuestión planteada por la llamada probabilidad lógica esto es, por la probabilidad de un enunciado de probabilidad, desde la perspectiva frecuencial, es irrelevante, ello debido a que un enunciado de probabilidad sobre eventos es traducible en términos de un enunciado de probabilidad sobre una sucesión fáctica. Obviamente, cada elemento de la sucesión fáctica debe ser describible por un enunciado sigular de la forma p_k. Cuando se desee precisar la probabilidad lógica de un enunciado, debe traducirse a este último en términos de enunciados singulares y calcularse la frecuencia relativa sobre el número de ellos que satisfaga el atributo verdadero. De este modo verdadero se convierte en el valor límite de un enunciado de probabilidad sobre una secuencia de enunciados singulares que tiende a infinito. †

Por razones de simplicidad puede construirse una escala para clasificar a los enunciados que expresan una probabilidad lógica en solamente verdaderos o falsos. Denotemos por P(h) la probabilidad del enunciado h y consideremos el valor p igual a 1/2.

(a) Si $P(h) \geqslant 1/2$, diremos que h es verdadero

(b) Si $P(h) \leqslant 1/2$, diremos que h es falso .

1.1.3.6 . La concepción clásica, erigida sobre la definición de 'probabilidad' dada por Laplace y el conocido "principio de indiferencia", se convierte en un caso particular dentro del "modelo frecuencial clásico". La afirmación precedente se funda en: (i) que la definición dada por Laplace como primer principio de su Ensayo filosófico sobre las probabilidades es: "la razón entre el número de casos favorables y el de todos los casos posibles"&; (ii) que el "principio de indiferencia" enunciaba que todos los casos posibles pueden ser asumidos como igualmente posibles si no hay información que señale lo contrario. De (i) y (ii) se deduce que la concepción clásica se refería a una sucesión sobre la cual se calculaba la frecuencia relativa de los atributos B,C,D,...etc. ,según sea el caso, y se asumía, de no existir información en contra, que el valor de la frecuencia relativa para cada uno de

† Vid.Reichenbach; idem. parágrafos 77 y 75, pp.387 y 395.

& Laplace,Pierre S.; Ensayo filosófico sobre sobre las probabilidades; Espasa -Calpe, Argentina, B.Aires,1947; p. 21.

estos atributos era igual. Lo anterior explica porqué los clásicos vieron en el juego de dados el ejemplo por antonomasia al cual aplicar el cáculo de la probabilidades. A este juego se recurrió para demostrar la validez del "principio de indiferencia" llamado también "principio de razón insuficiente"†. Se afirmaba que las seis caras de un dado eran igualmente posibles en tanto no existía *razón* alguna para suponer lo contrario. Además, a las sucesiones fácticas, que satisfacían el "principio de indiferencia", se les llamó sucesiones azarosas y se señaló como su característica típica la no existencia de táctica alguna para predecir los atributos de sus elementos con éxito.

El error de los clásicos radicó en creer que la igualdad de los valores para las frecuencias relativas de A, B, C,...etc. podía establecerse *a priori* en virtud del "principio de indiferencia". Ello equivalía a sostener la calculabilidad de dicha igualdad a partir de la ignorancia absoluta. La causa de que se mantuviera por largo tiempo este error fue, presumiblemente, el éxito de las aplicaciones del cálculo de las probabilidades a los juegos de azar. Este hecho, conjeturamos, impidió que se sospechara la presencia de un error de base.

La tesis frecuencialista prescinde del "principio de indiferencia" o de cualquier otro parecido, porque sostiene que un enunciado de probabilidad es empírico y, en ese sentido, incompatible con todo apriorismo para descubrir valores de probabilidad. Por tanto, propone como criterio para decidir si una sucesión es azarosa o aleatoria que se la prolongue lo suficiente y si al calcularse los valores de la frecuencias relativas o de sus límites para los atributos B,C,D,...etc., se encuentra que estos valores son iguales, entonces se afirma que la sucesión en cuestión es azarosa o aleatoria. Cuando la sucesión azarosa es infinita, von Mises la llama colectivo&

†Esta denominación la hemos recogido de von Wright; idem.p.100. Allí mismo señala que la versión original de este principio fue de James Bernouilli.

&von Mises, Richard; Probabilidad, estadística y verdad, p. 51

y define el valor de P(A,B) como igual al límite de la frecuencia relativa de un atributo en un "colectivo".

En consecuencia, de conformidad con lo antes dicho, la aplicación del cálculo clásico de las probabilidades se reducía a sucesiones con propiedades B, C, D,...etc. tales que:

$$F^n(A,B) = F^n(A,C) = F^n(A,D) = \ldots = \text{etc.}$$

La igualdad anterior es la misma cuando se trata de límites. A estas sucesiones se les denomina equiprobables.

1.1.4 . Objeciones al "modelo frecuencial clásico".

Al "modelo frecuencial clásico" se le han hecho múltiples objeciones. Para exponerlas, nosotros consideraremos que ellas son fundamentalmente de dos clases: (i) las que afirman la existencia de errores de base en el "modelo frecuencial clásico", de tal modo que éste resulta insuficiente para dar cuenta aun de los enunciados de probabilidad más simples; (ii) las que señalando las limitaciones del "modelo frecuencial clásico" le reconocen, sin embargo, un amplio campo de aplicación. Primero presentaremos las objeciones de la clase (i) para luego hacer lo propio con las de la clase (ii).

1.1.4.1 . El modelo frecuencial clásico" tiene la limitación de hacer depender el valor de la probabilidad del orden particular que presenta la sucesión fáctica, pues la noción de límite es implícitamente ordinal. Esto significa que el valor de P(A,B) puede cambiar si modificamos el orden de los elementos de la sucesión, lo cual no es compatible con la definición de 'probabilidad' en términos de proporción, desde que esta última puede mantenerse completamente ajena a todo criterio de orden: Braithwaite[&] es uno de los teóricos más importantes de la objeción precedente.

& Braithwaite; idem. p. 144 y ss.

1.1.4.2 . No toda sucesión matemática es convergente. y puede probarse que existen sucesiones fácticas, interesantes para el investigador, no expresables por sucesiones matemáticas convergentes determinables por una regla de construcción. De otra parte, si los enunciados de probabilidad se refieren a sucesiones fácticas infinitas, entonces no puede saberse nunca si una sucesión no convergente, hasta donde nuestros conocimientos nos permiten afirmarlo así, tenderá después de un elemento enésimo hacia un límite. Por tanto, los enunciados de probabilidad dentro del esquema frecuencial son infalsables. Esta ingeniosa objeción se la debemos a W. Kneale.[&]

1.1.4.3.. El "modelo frecuencial clásico", al hacer coincidir el valor de la probabilidad con el límite de la frecuencia relativa en sucesiones infinitas, nos compromete con la innecesaria suposición metafísica de que hay sucesiones fácticas infinitas. Este supuesto es inadecuado para el conocimiento empírico que es incompatible con un número infinito de observaciones. Asimismo, un enunciado del tipo 'todos los gatos son negros' tendrá un valor de probabilidad 1 tanto en el caso en que todos los gatos sean negros como en el que haya algunos gatos no negros, pues 1 como valor del límite de la frecuencia de un atributo en una sucesión infinita no requiere, necesariamente, que todos los elementos de ella tengan dicho atributo. Igualmente el enunciado anterior tiene probabilidad 0 si no hay gatos negros o si existen algunos gatos negros. Por tanto, desde la tesis frecuencialista, las condiciones en las que asume un enunciado uno de los valores 1, 0 no son únicas y conducen a confusiones. Esta objeción ha sido formulada por F.S.Barker.[&&]

[illegible] del límite de la frecuencia relativa cuando

[&] Kneale, William; Probability and Induction; Oxford University Press, Oxford, 1963; parágrafo 32, p. 159.

[&&] Barker, Sthephen F.; Inducción e hipótesis; Eudeba, B. Aires, 1963; p. 88 y 55

1.1.4.4 . El valor del límite de la frecuencia relativa, cuando es determinado, no permite deducir valor alguno para las frecuencias relativas de segmentos finitos de la sucesión, que son los únicos observables. Debido a la restricción anterior no puede concederse a un enunciado de probabilidad, lógicamente consistente, la condición de una hipótesis de alto nivel porque no pueden derivarse de él consecuencias observables. Esta objeción ha sido formulada por Braithwaite, en las páginas citadas con ocasión del argumento 1.1.4.1.

Enunciaremos a continuación las objeciones de la clase (ii).

1.1.4.5 .Karl Popper[&] señala que el "modelo frecuencial clásico" es sólo adecuado para entender enunciados de probabilidad sobre eventos. En ese sentido la consecuencia 1.1.3.5 es falsa, pues escapan a los alcances de la tesis frecuencialista generalizada tanto la probabilidad lógica como la corroboración de hipótesis. Este autor propone, además, remplazar el axioma de convergencia" usado por el modelo en discusión, según lo establecido en 1.1.3.4 . La mencionada sustitución es factible en razón de que la verdad de $0 \leqslant P(A,B) \leqslant 1$ nos permite introducir la noción de punto de acumulación de la sucesión de frecuencias relativas. La inserción anterior es legítima porque toda sucesión de frecuencias relativas está acotada por 1 y 0 y de acuerdo al conocido teorema de Bolzano y Weierstrass, toda sucesión infinita y acotada tiene al menos un punto de acumulación. Luego si tenemos la sucesión de frecuencias relativas correspondientes a un atributo B y a es el punto de acumulación, entonces $P(A,B) = a$.

1.1.4.6 . Rudolf Carnap[&&] también observa la identificación efectuada entre la probabilidad de eventos o probabilidad estadística y la pro-

[&] Popper; idem. parágrafo 64, p.173. Sobre el asunto puede revisarse todo el capítulo octavo.

[&&] Carnap; idem. parágrafo 9 y 23 del cap.II; también parágrafos 41- 43 babilidad lógica. El considera que los dos conceptos anteriores son diferentes y, para evitar confusiones, recomienda hablar de "grado de confirmación" en lugar de probabilidad lógica. La nota específica del "grado de confirmación" es que es una función numérica de la forma $c(h,e) = r$ [†], cuyos valores se determinan analíticamente. Por consiguiente, dicha función es lógicamente verdadera o lógicamente falsa a diferencia de $P(A,B) = \lim_{n \to \infty} F^n(A,B)$ que tiene contenido fáctico de manera análoga a $c(h,e)$, pero que, por añadidura, la determinación de su valor depende de la experiencia. Por otro lado la función $c(h,e)$ es una implicación lógica diferente a la ordinaria sólo en grado. Mientras $c(h,e)$ es una implicación lógica imcompleta porque el rango de e no está totalmente incluido en el de h, la implicación lógica ordinaria es completa porque en ella el rango de e se encuentra contenido en el rango de h. [††] El estudio de la implicación ordinaria es la tarea propia de la lógica deductiva y el de $c(h,e)$, denominada función de confirmación o c función, compete a la lógica inductiva.

Carnap no comparte la objeción 1.1.4.4 , pues considera que ella se salva si no asumimos el valor del límite de la frecuencia relativa como un dato para deducir valores de frecuencias relativas en sucesiones finitas. El sentido del cálculo del valor del límite es predecir como se comportará la sucesión en el futuro. Sin embargo el límite no debe ser identificado con el valor de las futuras frecuencias relativas sino que debe ser pensado como un estimado de ese valor.

En consecuencia Carnap opina que agregar una teoría sobre el gra-

[&] Carnap; idem. parágrafo 9 y 23 de cap. II; también parágrafo 41 - 43.

[†] Se lee: el grado de confirmación de la hipótesis h sobre la evidencia e es igual a r. Vid, Carnap, cita supra.

[††] Sobre el asunto Vid. Carnap, idem. pp. 70-89. También Wittgenstein, idem. 4.4463.

do de aproximación de los estimados perfeccionaría y completaría al "modelo frecuencial clásico".

La consideración atenta de los argumentos de Popper y Carnap mostrará que de las objeciones 1.1.4.1 a 1.1.4.4 ha quedado sin respuesta sólo la cifrada con 1.1.4.3 . La objeción 1.1.4.2 , que parecería quedar pendiente, se desvanece si se recurre a lo dicho en 1.1.3.2 y 1.1.3.4 .

En relación a la objeción pendiente indicamos que el "modelo frecuencial clásico" no supone necesariamente la existencia de secuencias infinitas sino que, si se presentan, las involucra. Si tomamos una secuencia finita, es suficiente hacer coincidir el valor de la probabilidad del atributo en cuestión con el último elemento de la secuencia de frecuencias relativas para dicho atributo. Reichenbach & señala claramente el procedimiento aludido cuando interpreta los axiomas de su sistema axiomático de probabilidad mediante el "modelo frecuencial clásico".

Asimismo, la supuesta falta de unicidad en las condiciones que permiten atribuir a un enunciado de probabilidad uno de los valores 1 , 0 s debe a que se identifica a éstos con la certeza absoluta para la predicción En vista de que los frecuencialistas&& no pretenden la citada identidad, la objeción desaparece.

& Reichenbach; idem. parágrafo 18, p. 72 .

&& Sobre el asunto, Vid. Reichenbach, idem. parágrafo 12, p. 54 y von Mises idem. p. 59 segunda lección).

SECCION II

2. 0 . El modelo de rango.

2.0 . En la medida que la objeción más seria al "modelo frecuencial clásico" es su insuficiencia para dar cuenta de los enunciados de probabilidad sobre hipótesis (enunciados), hemos juzgado oportuno referirnos en esta sección al modelo rango, cuya pretención básica es subsanar la deficiencia antes anotada del primero. De manera notoria, la explicación dada en la sección precedente a la probabilidad de una hipótesis no resulta adecuada, pués no parece correcto afirmar que una hipótesis es más probable que otra sólo por el hecho de poseer un número mayor de enunciados verdaderos de la forma p_k, que la corroboren. Parece necesario, además, averiguar la naturaleza y los alcances de los enunciados corroboradores y de los contra ejemplos.

El modelo de rango, que nos ocupará en adelante, no pretende excluir a la tesis frecuencialista sino delimitar su campo de aplicación. Por tanto, los teóricos del modelo de rango opinan que el "modelo frecuencial clásico" debe ser usado exclusivamente para calcular la probabilidad de los enunciados empíricos sobre sucesiones fácticas. Los valores así obtenidos dependen de la experiencia y un sistema axiomático de probabilidades sólo puede derivar nuevos valores desde ellos si éstos proporcionan la información suficiente.

El pensador William Kneale[&] en su libro Probability and Induction señala que la noción de rango fue introducida por von Kries en 1886, esto es, aproximadamente medio siglo después que se sugiriera el modelo frecuencial. Posteriormente Wittgenstein[&&], usando conceptos lógicos de su factura, dio la siguiente definición rigurosa de probabilidad en términos de rango:

[&] Kneale; idem; parágrafo 35 p. 174 y ss.
[&&] Wittgenstein; idem. Vid. 5.15 .revisar hasta 5.156.

> "If Tr is the number of the truth-grounds of a proposition 'r', and if Trs is the number of the truth-grounds of a proposition 's' that are at the same time truth-grounds of 'r', then we call the ratio Trs: Tr the degree of probability thad the proposition 'r' gives to de propositions 's'".

En la definición precedente Tr y Trs son rangos como se puede verificar si se revisa 4.463 de la obra antes citada. Waismann[†] también se cuenta entre los que adoptaron el modelo de rango y Kneale, en la obra antes mencionada, lo desarrolla con alguna amplitud. Pero es Carnap quien partiendo d la definición de Wittgenstein nos ofrece en su Logical foundations of probability la exposición más exhaustiva que conocemos del modelo de rango. En lo que sigue haremos una descripción de dicho modelo.

2.1.1 . Según Carnap, la palabra probabilidad cuando es predicada de hipótesis empíricas denota una relación entre los significados de enunciados. Los argumentos de esta relación son una hipótesis h y un enunciado o conjunto de enunciados e que cumple la función de informe de observación o evidencia empírica para h. El grado de la relación es mensurable por un número racional cualquiera del intervalo abierto 0, 1; su valor es analíticament decidible teniendo en cuenta sólo los significados de h y e . Ordinariamente en lenguaje científico, se deja implícito el argumento e, omisión que ha dificultado la correcta comprensión de los enunciados de probabilidad.

La relación mencionada se denomina "grado de confirmación" y se escribe abreviadamente $c(h,e) = r$[††]. La notación precedente es útil para la construcción de un sistema axiomático en el cual $c(h,e)$ es una función. Dicho sistema es llamado sistema de las c-funciones.

[†] Esta información la hemos tomado de Kneal, idem, ibidem. Allí se cita el artículo de Waismann Logische Analyse des Wahrscheinlichkeitsbegriffes, publicado en Erkenntnis, I,1930.

[††] Para su lectura ver nota de p.30

La función c(h,e) es una "implicación lógica parcial". Es debido a su carácter parcial que se recurre a una fracción propia para determinar su valor. Asimismo, la determinación por medios puramente analíticos de los valores de las funciones del tipo c(h,e), no exige en modo alguno que h y e carezcan de contenido fáctico, pues las relaciones entre dichos argumentos pueden establecerse con independencia de que tengan referente factual o no.

2.1.2 . Las funciones de confirmación (c(h,e) o c-funciones)no son computables en general sino en algunos casos, los mismos que acontinuación se especifican: (i) siempre que h y e sean enunciados moleculares de cualquier sistema £; (ii) cuando h y e sean enunciados de forma general o molecular de cualquier sistema finito $\pounds_{N}$; (iii) cuando h y e sean enunciados de cualquier sistema $\pounds_{\infty}$ el cual contiene sólo predicados del grado uno. La forma de h y e en (iii) puede ser similar a las indicadas en (i) y (ii).

El signo £ denota cualquier sistema lingüístico formalizado y el sub-índice el número de individuos del dominio al cual se refiere. Las dos variedades de sistemas más importantes dentro del tipo £ son los $\pounds_{N}$ y $\pounds_{\infty}$. Los $\pounds_{N}$ se refieren a un número finito de individuos y el valor de su sub-índice N puede ser cualquier entero positivo. Los $\pounds_{\infty}$ se distinguen por referirse a infinitos individuos. De otra parte, un enunciado molecular es aquel que está en forma normal disyuntiva o puede ser reducido a ella. Uno general es aquel que tiene la forma (x)Px o (Ex)Px, tratándose de predicados de grado uno. El signo '(Ex)', en este trabajo, corresponde al cuantificador existencial.

Para la comprensión del modelo de rango es ineludible la alusión a los sistemas £. Ello se debe a que la noción de rango, decisiva para computar la función c(h,e), es relativa a un sistema lingüístico. Por tanto, recalcamos que la computabilidad de las c-funciones depende, además de los sig nificados de h y e , del sistema $\mathcal{L}$ al que pertenezcan los argumentos de la función. En lo que sigue, a fin de determinar con exactitud qué es un rango, nos referiremos con algún detenimiento a los sistemas $\mathcal{L}$. Previamente son pertinentes dos aclaraciones:

(1) Lo que expondremos luego constituye una síntesis, adaptada a nuestros intereses, de la descripción minuciosa de los lenguajes $\mathcal{L}$ realizada por Carnap en el capítulo III, parágrafos 14 - 20, de la obra ya varias veces citada .Debe enfatizarse que este autor es prolijo y riguroso en dicho capítulo porque en su plan está aplicar los teoremas válidos en los sistemas $\mathcal{L}$, que son deductivos, a su lógica inductiva. Este propósito está en concordancia con una de las tesis centrales de la epistemología de Carnap, la cual afirma que la lógica se divide en dos ramas: la lógica deductiva y la lógica inductiva. El desarrollo de la segunda presupone el desarrollo de la primera.

(2) La notación usada por Carnap demanda el empleo de tipos especiales, letras góticas . Nosotros para evitar dificultades prácticas los hemos adaptado a nuestros tipos. Como no haremos una descripción especial para $\mathcal{L}_N$ y otra para $\mathcal{L}_\infty$, será suficiente referirnos simplemente a los $\mathcal{L}$ y cuando lo dicho deba ser particularizado añadiremos los sub-índices N y ∞ según las circunstancias lo demanden.

Hechas las aclaraciones anteriores pasamos inmediatamente a ocuparnos de los lenguajes $\mathcal{L}$.

2.1.3 . Hablar de un lenguaje requiere, como es conocido, de un metalenguaje. En este caso usaremos, para referirnos a los lenguajes $\mathcal{L}$, al castellano como metalenguaje ayudado por los siguientes signos especiales:

(s.1) 'in' denota constantes individuales
(s.2) 'im' denota variables individuales

(s.3) 'p' denota predicados primitivos del grado n, n $\geqslant$

(s.4) 'U' denota cualquier expresión, esto es un signo invidual o una secuencia finita de signos.

(s.5) 'M' denota matrices del tipo Px

(s.6) 'A' denota clases cuyos elementos son enunciados

(s.7) 'B' denota descripciones de estado

(s.8) 'R' denota rangos

Añadiremos una regla de construcción que Carnap consigna a continuación de las convenciones anteriores.[&]

(s.9) "Un nombre en el metalenguaje para una expresión compuesta del lenguaje objeto se construye mediante la simple yuxtaposición de los nombres (o variables) de los signos que constituyen dicha expresión compuesta". [&&]

Para ilustrar el uso de la convención (s.9) consideremos: si 'pr_i' se refiere a R, 'in_j' a c̲, 'in_k' a d̲, luego '$pr_i in_j in_k$' se refiere a Rcd. Obviamente, Rcd pertenece a algún sistema £ y , como veremos luego, su significación es la misma para todo lenguaje £.

2.1.4 . Antes de señalar los signos de los £ haremos una aclaración para evitar confusiones al interpretar la palabra 'enunciado'. Carnap usa la palabra 'sentence' que hemos traducido por 'enunciado'. Con ella denota a una secuencia finita de signos o marcas como puede deducirse de su afirmación "we have decided to understand by the term 'sentence' just the string of marks" [†]. Por tanto la palabra 'sentence' no se refiere al significado de los signos y una misma sentence que contiene variables individuales ,por citar un ejemplo, no significa lo mismo en $£_N$ que en $£_\infty$.

[&] Carnap; idem. pp. 55 - 58.

[&&] El texto original es: "A name in the metalanguage for a compound expression of the object language is formed by, simple juxtaposition of the names (or variables) for the signs of which the compound expression consists".

[†] Carnap; idem. parágrafo 15, p. 60.

Lo dicho no impide que Carnap afirme con sentido que una <u>sentence</u> expresa un significado o una proposición. Inclusive admite que las relaciones entre <u>sentences</u> pueden ser interpretadas como relaciones entre proposiciones. Esta última posibilidad la concede en el parágrafo antes citado y en otras partes de su obra.[†]

En general los sistemas £ tienen el mismo repertorio de signos con algunas variantes concernientes a su significado y número. Todo sistema £ tiene un número finito de predicados primitivos de grado n, ($n \geqslant 0$). Si $n = 0$, el predicado respectivo es considerado como un enunciado; si $n = 1$, se le denomina propiedad; si $n = 2$, se le denomina relación diádica; y en general para $n \geqslant 2$ se habla de relaciones n-ádicas. Así P_1, P_2, etc. son propiedades y R_1, R_2, etc. son relaciones de grado n, ($n \geqslant 2$). Todo sistema £ tiene un número infinito de variables individuales x_1, x_2, x_3, etc. Todo sistema £$_{\infty}$ tiene un número infinito de constantes individuales a_1, a_2, a_3, etc. Los sistemas del tipo £$_N$ contienen las N primeras constantes individuales de un £$_{\infty}$. Las constantes individuales de los £ deben designar distintos y separados individuos. Asimismo, las variables individuales y las constantes individuales son denominadas genéricamente signos individuales.

Todo sistema £ tiene el signo ' = ' de identidad que no debe ser considerado predicado primitivo. Contiene también los operadores 'v' , '.' y '∼' . El '⊃' o cualquier otro operador puede ser introducido mediante definiciones conocidas. Cada uno de los £ contiene enunciados generales de las formas (x) (Px) y (Ex) (Px). En los £$_N$ los enunciados de la forma (x) (Px) son lógicamente equivalentes a la conjución de N componentes $Pa_1 . Pa_2 . \ldots . Pa_N$. La misma propiedad, en términos de componentes disyuntivos, se cumple para (Ex) (Px) dentro de todo £$_N$.

† Vid. Carnap, idem. parágrafo 8, p. 20.

Sólo las variables individuales tienen diferente significación en diferentes sistemas £. Por tanto, todo enunciado que no contiene variables individuales tiene la misma significación en todo £. Existen además en todo £ enunciados t que son tautologías. El orden de los enunciados Ma_1, Ma_2, Ma_3, etc. es irrevalente. Para la presente versión puede optarse por un orden lexicográfico.

2.1.5 . Para los signos de los £ se dan las usuales reglas de formación aplicadas a los sistemas deductivos. Nosotros, en honor de la brevedad, las supondremos+ y pasaremos a las siguientes definiciones las cuales son una versión ligeramente modificada con respecto a las proporcionadas por Carnap.

(d.1) i es un enunciado atómico $=_{Df.}$ i tiene la forma $pr_i\ U_{j_1}\ U_{j_2}\ U_{j_n}$ y cada una de las expresiones U_j es un signo individual in.

(d.2) i es un enunciado básico $=_{Df.}$ i es un enunciado atómico o su negación.

(d.3) A_i es un par básico $=_{Df.}$ A_i es una clase de dos enunciabásicos, siendo el primero afirmativo y el segundo su negación.

(d.4) i es un enunciado de identidad $=_{Df.}$ i tiene la forma $U_i = U_j$.

(d.5) i es un enunciado molecular $=_{Df.}$ i es un enunciado atómico o está constituido por enunciados atómicos ligados por conectivas.

(d.6) i es un enunciado general $=_{Df.}$ i contiene al menos una variable im y por tanto al menos un cuantificador.

(d.7) i es un enunciado no general $=_{Df.}$ i contiene un número n de variables im y de cuantificadores, siendo n = 0.

+ Si se desea detalles sobre el asunto Vid. Carnap, idem. parágrafo 16, p. 65.

(d.8) i es un enunciado puramente general $=_{Df.}$ i es un enunciado general y no contiene in alguna.

(d.9) i es un enunciado singular $=_{Df.}$ in es un enunciado molecular conteniendo ocurrencias de solamente una constante individual.

2.1.5 . Precisar el concepto de rango demanda previamente esclarecer el de descripción de estado. A continuación usamos las convenciones de los parágrafos 2.1.3 y 2.1.4 para satisfacer la exigencia anterior. Una descripción de estado para cualquier £ es una clase de enunciados los que precisan inequívocamente para todo individuo denotado por las in de £ y para toda propiedad denotada por los pr de £, si todo individuo posee o no todas y cada una de las propiedades. Esta caracterización dada para predicados del grado 1 puede ser facilmente generalizada.

Debido a que para todo £ existe la clase de los pares básicos de £ todos sus posibles estados pueden ser descritos afirmando un enunciado i por cada par básico (i , ~i) . Si $£_N$ se refiere a N individuos y tiene k predicados, luego en $£_N$ la clase de los pares básicos tiene k x N elementos. Supongamos como ejemplo N = 3 y k = 2, luego la clase de los pares básicos de $£_N$ tendrá como elemento a

(Pa ,-Pa) , (Pb,-Pb) , (Pc ,-Pc) , (Qa,-Qa) , (Qb, -Qb) , (Qc ,-Qc).

Denotemos con ${}_N B$ o ${}_\infty B$ una descripción de estado según £ sea un sistema con un dominio finito o no, luedo tendremos para el ejm. dado

Pa . Pb . Pc . Qa . Qb . Qc $({}_N B_1)$

Pa . Pb . Pc .~Qa .~Qb .~Qc $({}_N B_2)$

⋮

que son dos descripciones de estado de las $2^{k \times N}$ posibles.

expresaremos en los £ non V_B la clase de todas las descripciones de estado y con F_B la clase nula do las descripciones de estado.

Postularemos ahora que la cuestión planteada en términos de cómo determinar el significado de un enunciado en £ se resulve cuando se dilucida cuales estados de £ lo convierte en verdadero y cuales en falso. Obviamente tales estados son conocidos a través de sus respectivas descripciones B.

2.1.6 . En este parágrafo cumpliremos uno de los objetivos importantes perseguidos con el estudio de los sistemas £. Definiremos el rango de un enunciado y expondremos su relación con los denominados L-conceptos. Usaremos la convención 'Ri' para referirnos al rango de un enunciado i cualquiera.

(d.10) Ri en £ $=_{Df.}$ la clase de todas las descripciones de estado B que hacen verdadero a i .

Los L-conceptos, llamados así por Carnap debido a su carácter estrictamente lógico, se definen con el auxilio de la noción de rango. A continuación presentamos tres de ellos, seleccionados en armonía con nuestros intereses.

(d.11) i es L-verdadero (en £) $=_{Df.}$ Ri es V_B

(d.12) i es L-falso (en £) $=_{Df.}$ Ri es F_B

(d.13) i L-implica j (en £) $=_{Df.}$ Ri es sub-clase de Rj, $Ri \subset Rj$

Entre estas definiciones tiene inmediata importancia para nosotros la (d.13). A la relación en ella definida Carnap la denomina "implicación lógica completa" porque el rango de i está contenido en el de j. Esta implicación es a su vez L-verdadera, pues si no lo fuera debería cumplirse R (i L-implica j) $\neq V_B$ y , por tanto, debería existir una descripción de estado B_h para la cual i sería verdadero y j falso. Pero esto es absurdo porque supone la existencia de un elemento de Ri que no pertenece a Rj. Eh consecuencia hemos demostrado la validez de "R(i L-implica j) igual a V_B".

Anotamos que a los enunciados L-verdaderos los hemos llamado en las secciones precedentes enunciados analíticamente verdaderos para diferenciarlos de los factuales o empíricos. Estos últimos también pueden ser definidos mediante relaciones entre rangos del modo siguiente:

(d.14) i es un enunciado factual (en £) $=_{Df.}$ $Ri \neq V_B$ y
$Ri \neq F_B$.

A los enunciados L-verdaderos y L-falsos se les da la denominación genérica de L-determinados.

2.1.7. Lo expuesto desde el parágrafo 2.1.3 al 2.1.6 tiene por objeto familiarizarnos con el aparato conceptual dentro del cual Carnap define a la <u>implicación lógica parcial</u>. Puesto que esta última noción (que debe ser entendida como otra manera de referirse a c(h,e)) es la más importante de la presente sección, la precisaremos con detalle.

(i) La <u>implicación lógica parcial</u> debe ser considerada uno de los L-conceptos en tanto es definible por medio de relaciones entre rangos. Por tanto, puede escribirse abreviadamente L-implicación parcial.

(ii) La L-implicación parcial es expresada en los sistemas £ por la función de confirmación c(h,e). Esta denota una relación entre rangos diferente a la de contenido, pues indica solamente la proporción o medida del rango de un enunciado que se encuentra dentro del rango de otro enunciado.

(iii) El enunciado 'i L-implica parcialmente j' no es factual sino un tipo especial de enunciado L-determinado. Esto significa que el enunciado anterior es L-verdadero o L-falso cuando afirma la existencia de una relación métrica entre los rangos de <u>i</u> y de <u>j</u>. El grado de esta relación es expresado por un número racional del intervalo (0,1) y puede ser calculado e base a información proveniente sólo de análisis semántico de i y de j . Por consiguiente, mientras que un enunciado que expresa una L-implicación completa es verdadero para V_B de £ cuando afirma una relación de contenido entre rangos, uno que expresa una L-implicación parcial es verdadero para V_B de £ si afirma una relación métrica o de medida entre rangos.

(iv) La implicación parcial es el objeto de estudio de la lógica inductiva que es la disciplina encargada de establecer los métodos adecuados para calcular el valor de la relación de medida. Como dijéramos en el parágrafo 2.1.2, este valor no es siempre computable. Asimismo, la caracterización hecha en (i) - (iii) es completamente correcta para todos los casos en que la computabilidad es posible y válida en princiío para los otros.

(v) Para indicar el método de computación de c(h,e), cuando éste existe, podemos asumir inicialmente que h y e son enunciados moleculares o funciones de verdad en $£_N$ y, en consecuencia, son reducibles a enunciados en forma normal disyuntiva. Esto es posible porque cada B que hace verdadero a h es una conjunción de N componentes. Luego el rango de h estará constituido por la clase de todas las conjunciones de N componentes para las que h es un enunciado verdadero. Puesto que cada B es uno de los casos posibles para la verdad de h, el rango de este enunciado en $£_N$ puede escribirse disyuntivamente: $B_1 v B_2 v \ldots v\ B_n$. Lo mismo se cumple para e .

Dado que c(h,e) o L-implicación parcial denota una relación de inclusión parcial entre Re y Rh, la medida en que e apoya a h se determina en términos de la proporción de Re. Rh con respecto a Re. Para calcular la razón anterior se usa como medida un "eslabón" de cualquiera de las dos formas normales disyuntivas encontradas. Claramente, cada "eslabón" es una conjunción de N componentes. Si m(h,e) es el número de componentes B comunes a Rh y Re la medida de h. e en $\mathcal{L}_N$, y m(e) el número de componentes B de Re o la medida de e en $\mathcal{L}_N$, luego la proporción es expresada por:

$$\text{(f.12)} \quad c(h\ ,\ e) = \frac{m\ (\ e.h\ )}{m\ (\ e\ )} \quad .$$

La fórmula (f.12) proporciona un valor determinado a condición de que $m(e) \neq 0$. Cuando $Rh \cap Re = Re$, luego $c(h,e) = 1$. Asimismo, si $Rh \cap Re = \emptyset$, entonces $c(h,e) = 0$. Por otra parte la función c(h,c) debe cumplir necesariamente las siguientes condiciones:

(a) Si e y e' son L-equivalentes (Re = Re') , luego
c(h,e) = c(h,e') .

(b) Si h y h' son L-equivalentes (Rh = Rh'), luego c(h,e) = c(h',e)

(c) e(h.j,e)= c(h,e) x c(j,e.h).

(d) Si e. j. h es una conjunción L-falsa, luego
c(h v j , e) = c(h,e) + e(j,e). &

A m(e.h) o a m(e) Carnap las considera casos particulares de la función de medida genéricamente denominada m. Esta función es de caracter regular cuando satisface las siguientes condiciones: (1) Si $m(B_i)$, para todo B_i en $\mathcal{L}_N$, es igual a un número real positivo; (2) Si la sumatoria de los valores m de las $2^{k \times N}$ descripciones de estado posibles en $\mathcal{L}_N$ es igual a 1. De (1) y (2) se deduce que m es una función regular para las B_i en $\mathcal{L}_N$ cuando $0 < m(B_i) < 1$. Consecuentemente, c es una función regular si está definida en términos de funciones m regulares.

Sin embargo, la validez de (f.12) se encuentra restringida a los sistemas $\mathcal{L}_N$ y es también de interés teórico precisar la computabilidad de c(h,e) en los sistemas de tipo $\mathcal{L}_\infty$. Con este fin escribiremos ${}_Ne(h,e)$ para indicar que la función c se encuentra en $\mathcal{L}_N$ y ${}_\infty c(h,e)$
para indicar que c se encuentra en $\mathcal{L}_\infty$. Se afirma que ${}_\infty c(h,e) = r$ si la función ${}_Nc(h,e)$, con N creciente, converge hacia r como a su límite. Esto se

expresa formalmente:

$$\text{(f.13)} \qquad {}_{\infty}c(h,e) =_{\text{Df.}} \lim_{N \longrightarrow \infty} {}_{N}c(h,e)$$

(vi) Como propiedades inmediatas de la función c mencionaremos:

(a) Si h es una tautología t el valor de c será máximo con independencia de e. Esto debido a que se postula que no hay enunciado más confirmado que una tautología. Esta propiedad se expresa formalmente:

$$c(t,e) = 1$$

(b) $c(h,e) + c(\sim h,e) = 1$, pues por la propiedad (a) tenemos $c(h \vee \sim h,e) = c(t,h) = 1$ y por (d) de (v) $c(h \vee \sim h,e) = c(h,e) + c(\sim h,e)$.

(c) Si $Rh \cap Re$ es igual a la clase vacía, con la adición d la propiedad (a) tendremos :

$$0 \leqslant c(h,e) < 1$$

(d) Para $c(h,e) = 0$ puede sostenerse que h es L-falsa, vale decir, nada la confirma.

(e) La confirmación sobre la evidencia de una tautología t es denominada confirmación nula y se escribe abreviadamente así : c_0 . En este caso se postula que el valor de c es siempre mayor que cero. Expresado formalmente se tiene :

$$c(h,t) = c_0(h,t)$$
$$c_0(h,t) > 0 \quad .$$

Con lo expuesto esperamos haber indicado los rasgos fundamentales del modelo de rango. En el próximo parágrafo derivaremos algunas consecuencias, a nuestro juicio, importantes.

2.20 . Consecuencias de la postulación del modelo de rango.

2.2.1 .Existen dos tipos de enunciados de probabilidad, a saber:

(i) los que denotan una relación de frecuencia relativa; y (ii) los que denotan una relación de medida entre rangos. Los del tipo (i) son factuales y estadísticos , mientras los del tipo (ii) son analíticos o lógicamente determinados. En ambos casos el grado de la relación es determinado por el valor de un cuociente.

2.1.2 . Los sistemas axiomáticos construidos a base de las funciones de la forma c(h,e) son los que admiten como su interpretación verdadera al modelo de rango. Los componentes m(e.h) y m(e) de la relación de medida entre rangos denotada por c(h,e), pueden también ser interpretados como clases de individuos determinadas por atributos dentro de universos de N o ∞ individuos. De esta manera c(h,e) admitiría además una interpretación frecuencial y habría la posibilidad de que un sistema formal de funciones c tenga algunos teoremas paralelos a otro de funciones P(A,B) .

2.2.3 . Un sistema formal de funciones c no plantea la cuestión referente a la probabilidad de c . Pues en tanto esta función es L-determinada sólo puede ser L-verdadera o L-falsa. En este sentido la aparición de nuevos datos no modifica el valor de la función c(lo que si ocurre en los sistemas construidos sobre la base de las funciones P(A,B)) sino que plantea la necesidad de formular otra función c, lógicamente determinada, que no es en modo alguno la anterior corregida sino otra.

2.2.4 . El modelo de rango no es independiente del supuesto de convergencia,nota que tiene en común con el frecuencial.Los enunciados generales en $\pounds_{\infty}$, cuando son computables, suponen la necesaria convergencia del valor de c, para N creciente, hacia un número r que es su límite.

2.2. 5. En la función c el argumento h puede ser un enunciado singular,particularidad que escapa a los alcances del modelo frecuencial. La de terminación del valor de c en este caso no entraña ninguna dificultad especia con respecto a la aplicación de las reglas generales de conputación.Por consiguiente es completamente lícito hablar de grado de confirmación de enunciados singulares dentro del modelo de rango.

2.2.6 .El modelo de rango es definitivamente de carácter lógico en el sentido de que sus conceptos fundamentales están cimentados sobre la conocida lógica de las proposiciones y la lógica funcional de primer orden.Así la computabilidad de la función c está restringida a los casos decidibles dentro de la lógica de primer orden.De otra parte la noción de rango en £,claramente definida antes por Wittgenstein,se funda en él establecimiento de todos los arreglos posibles construibles con los individuos del dominio de £,donde la longitud de cada uno de los arreglos es igual al número de predicados por el el número de individuos.La medida del rango de un enunciado está dado por el número m de arreglos,tomados del total de $2^{k \times N}$ arreglos,en los que tal enunciado es verdadero.Esto nos conduce a inferir que el modelo en cuestión,al no considerar dentro de un rango a todos los casos posibles sino sólo a los que hacen verdadero al enunciado que sea el caso,no presupone el principio clásico de la equiprobabilidad. Así la definición clásica, que incluía el llamado principio de indiferencia,quedaría reducida a los casos en que el argumento e es L-verdadero,vale decir,cuando e incluye todos los casos posibles en iguales condiciones.

2.2.7 .Las relaciones entre el modelo de rango y el concepto de cuociente de una apuesta imparcial(no mencionado antes en este trabajo) no parecen inmediatamente claras.Sin embargo es importante indicar que este último concepto ha sido usado por Carnap para definir en términos de azar el grado de confirmación.[&] Asimismo anotamos que el autor citado en su ponencia presentada al Coloquio Internacional de Filosofí de la Ciencia realizado en ...

[&] Vid.Carnap,idem. Capítulo IV, parágrafo 41, A-F, pp. 161-182 .

Londres en 1965[&], insistió en vincular el concepto de el mejor cuociente con el que una persona puede apostar contra otra con el grado de creencia. Como éstos asuntos tienen implicancias que escapan a nuestro tema, nos limitamos solamente a señalarlos.

continúa en la página siguiente

[&] Vid. Lakatos, Imre (ed.); Inductive Logic, (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1968.) Artículo de Carnap titulado Inductive logic and Inductive Intuition, p.258.

2.3.0 . Una objeción importante al modelo de rango.

2.3.1 . Popper, en algunos artículos que se publicaron originalmente en The British Journal for the Philosophy of Science, objeta la identificación de la probabilidad lógica en el grado de confirmación, apuntando así a una de las tesis fundamentales sobre las que se erige el modelo de rango. Los artículos mencionados, en español, han sido añadidos por su autor, como apéndices, a su obra La lógica de la investigación científica.

En vista de que la argumentación de Popper se basa en algunos conceptos precisados a través de la totalidad del libro aludido, para facilitar la comprensión de su objeción, nosotros haremos un apretado resumen de los planteamientos relevantes.

(i) Según Popper, una hipótesis científico-empírica tiene una forma lógica que la hace asimétrica con respecto a los conceptos de verificabilidad y refutabilidad. Esto es, mientras no existe ningún número finito de enunciados de observación que la verifique completamente, es suficiente uno, que describa un efecto reproducible, para hacerla falsa. El enunciado capaz de convertir en falsa una hipótesis científica es llamado "posible falsador" de dicha hipótesis y debe ser considerado como un enunciado prohibido por ella. Asimismo, una hipótesis es en rigor científico-empírica sí, y sólo si, la clase de sus posibles falsadores no es vacía. De otra parte, una hipótesis afirma sólo la falsedad de sus "posibles falsadores" y, de los enunciados compatibles con ella, lo único que puede decirse es que los permite. &

(ii) Los "posibles falsadores" de una hipótesis científico-empírica son enunciados denominados "básicos", cuya forma lógica es la de enunciados existenciales singulares. A cambio, las hipótesis tienen la forma lógica de un enuncia_...

& Ver Popper, idem. Capítulo IV.

do general universal típico, esto es, su estructura es la de $(x)(Fx \supset Gx)$. Lo anterior permite afirmar, de conformidad con las reglas lógicas conocidas que un "enunciado básico" necesita, para ser deducido de una hipótesis, que se añadan condiciones iniciales. Por tanto, p es un "posible falsador" de la hipótesis $(x)(Fx \supset Gx)$ si desde p es deducible $\sim(x)(Fx \supset Gx)$ y $\sim p$ es deducible de $(x)(Fx \supset Gx)$. Consecuentemente, p no puede ser un enunciado básico.

(iii) Dadas las hipótesis <u>h</u> y <u>h'</u> se dice que h es falsable en mayor grado que h' si la clase de los "posibles falsadores de h' es una subclase propia de la de los "posibles falsadores" de h. La probabilidad lógica de h es el complemento de su grado de falsabilidad en el siguiente sentido: la probabilidad lógica 1 corresponde al grado 0 de falsabilidad y, conversamente, la probabilidad lógica 0 corresponde al grado 1 de la falsabilidad.[3]

(iv) El objetivo del trabajo científico no es lograr hipótesis altamente probables sino hipótesis que transmitan una cantidad apreciable de información debidamente corroborada. De acuerdo a conocidos resultados de la teoría de la información, la hipótesis más probable es aquella que tiene contenido informativo más pobre. Por tanto, el grado de confirmación (o de corroboración) no puede ser identificado con interpretación alguna del concepto de probabilidad, pues ello conduce a paradojas como se prueba en lo que sigue.

2.3.2. Una de las paradojas generadas por la identificación señalada en (iv) puede construirse si comenzamos escribiendo Co(h,e) en lugar de "h está corroborada o confirmada por e". A ello añadimos la aclaración: si el grado de corroboración fuera expresable mediante el concepto de probabilidad, entonces "h es corroborada por e" significará "e incrementa la probabilidad de h" .La formulación de esto, en términos de operadores y variables, es :

$$(1)\ Co(h,e) = \left[\ p(h) < p(h,e)\ \right] .$$

Claramente, en la fórmula (1) se distingue entre la probabilidad absoluta de h y la probabilidad de h relativa a la evidencia e. Sin embargo, aunque (1) satisface la condición fundamental de considerar a una hipótesis corroborada cuando su probabilidad absoluta es menor que su relativa, no puede ser utilizada en razón de que dada la universalidad de h puede demostrarse:

$$(2)\ p(h) = 0 = p(h,e) .$$

La justificación detallada de (2) es: (a) como h es siempre universal, tiene una clase infinita de "posibles falsadores" y, por tanto, su probabilidad lógica es igual a cero; (b) desde que e es una cantidad finita de datos , entonces $p(e) \neq 0$; (c) por el teorema de la multiplicación $p(e.h) = p(h) \times p(e,h)$, pero $p(h) = 0$, luego se cumple $p(e,h) = 0$;(d) como $p(e,h) = p(h.e) = p(e) \times p(h,e)$, luego $p(h,e) = p(h.e)/p(e) = 0$.

La dificultad precedente hace pensar en la necesidad de dar una versión modificada de (1). Esto se consigue postulando $p(h) \neq 0$ y $p(e) \neq 0$ Así se obtine :

$$(3)\ Co(h,e) = \Big[\big(p(h,e) > p(h)\big)\ v\ \big(p(e,h) > p(e)\big)\Big]$$

que establece inequívocamente en qué caso se afirma que h ha sido confirmada por e.

Ahora, aplicando estos conceptos a un ejemplo, tomemos en consideración las tiradas de un dado no "cargado". Sea h el enunciado 'saldrá un seis', h' igual a $\sim$h y e el enunciado de información 'saldrá un número par'. Las probabilidades lógicas son

$$(4)\ p(h) = 1/6\ ,\ p(h') = 5/6\ ,\ p(e) = 1/2 .$$

Las probabilidades relativas de h y de h' respecto de e son

$$(5)\ p(h) = 1/3\ ,\ p(h') = 2/3$$

debido a que en 1,2,...,6 hay tres números pares uno de los cuales es seis.

En virtud de (5) inferimos que la hipótesis h ha sido confirmada mientras que h' nó, pues $1/3 > 1/6$ y $2/3 < 5/6$. En consecuencia, se cumplen las condiciones Co(h,e) y ~Co(h' , e) , aunque la probabilidad relativa de h es menor que la de h'.

Todo lo anterior demuestra que la conjunción siguiente es verdadera.

$$(6)\ Co(h,e) \cdot \sim Co(h',e) \cdot p(h,e) < p(h',e)$$

La fórmula (6) tiene la peculiaridad de demostrar que los conceptos de grado de confirmación y probabilidad son independientes entre sí. El que una hipótesis sea corroborada por cierta evidencia no implica que debe tener mayor probabilidad lógica que otra hipótesis no corroborada por la misma evidencia. Sin embargo, si se procede como Carnap, identificando la probabilidad lógica relativa con el grado de confirmación, se cae en la contradicción

$$(7)\ Co(h,e) \cdot \sim Co(h',e) \cdot Co(h,e) < Co(h',e)$$

que afirma que la hipótesis h ha sido confirmada más no la hipótisis h'(ambas con respecto a e), pero que el grado de confirmación de h es menor que el de h'

El resultado expresado por la fórmula (7) sería, según Popper, la prueba más clara de que la tesis de Carnap conduce a paradojas. Un ligero comentario sobre el asunto haremos en las conclusiones.

SECCION III

En las secciones anteriores hemos considerado dos de las interpr taciones dadas a 'probabilidad'. Sin embargo, como indicaremos oportunamente 'probabilidad'se usa también con referencia a sistemas axiomáticos para denotar una función numérica sometida a condiciones puramente operacionales. Est sección tiene por finalidad proporcionar detalles sobre esta segunda posibil dad mediante la presentación de un sistema axiomático, cuyo desarrollo se efectúa sin necesidad de recurrir a interpretación alguna de 'probabilidad'.

3.0. Un ejemplo de sistema axiomático de probabilidades.

3.1 . A continuación describiremos el sistema formal de probabil dades propuesto por Hans Reichenbach en el capítulo 3 de su libro The théory of probability. El desarrollo de este sistema es efectuado por su autor con independencia de toda interpretación para 'probabilidad'. Se asume solamente que existen ciertos valores numéricos denomidos probabilidades básicas, sujetos a ciertas condiciones establecidas por los axiomas, desde los cuales pueden derivarse lógicamente otros. La existencia de las probabilidades bási cas no puede ser demostrada dentro del sistema, pues se acepta que la afirma ción 'existe la probabilidad básica p' es de carácter sintético. Para garant zar la existencia de las probabilidades obtenidas desde las probabilidades b sicas Reichenbach enuncia una regla de existencia. Antes de formular esta re gla es necesario hacer las siguientes anotaciones: (i) Según el autor citado, ur valor de probabilidad corresponde a una implicación de probabilidad de la fo ma $(A \xrightarrow[p]{} B)$, que se lee "B se sigue de A con el grado de probabilidad p" (ii) en $(A \xrightarrow[p]{} B)$ los compomentes A y B son secuencias de acontecimiento describibles por enunciados del tipo p_k , por lo que la formulación detallad de la fórmula anterior es (i) $(x_i \in A \xrightarrow[p]{} x_i \in B)$ y cada x_i es un acontecimien to; (iii) la implicación de probabilidad $(A \xrightarrow[p]{} B)$ puede ser traducida a la notación matemática en la forma $P(A,B) = p$, lo que facilita la obtención de ecuaciones.

El enunciado de la regla existencia es la siguiente: "Si el valor numérico p de una implicación de probabilidad $(A \xrightarrow[p]{} B)$,asumida la existencia de la implicación de probabilidad, es determinando desde implicaciones de probabilidad dadas de acuerdo a las reglas del sistema, luego esta implicación de probabilidad $(A \xrightarrow[p]{} B)$ existe".[&]

La regla de existencia no forma parte del sistema sino de su meta lenguaje. Asimismo, los axiomas de adición y multiplicación desempeñan en este sistema, entre otras, la función de afirmar en particular lo afirmado por la regla de existencia en general.

El sistema de Reichenbach puede ser presentado en un tipo de notación denominada "implicacional" o en notación matemática. En ambos casos se hace uso de las tautologías de la lógica proposicional como reglas de transformación que son añadidas a las estrictamente matemáticas. De preferirse la notación matemática la regla de existencia puede formularse en términos tales como: existe un valor numérico para toda ecuación cuando las probabilidades independientes son dadas o una probabilidad es una función numérica de probabilidades dadas.

Reichenbach presenta primero sus axiomas en notación "implicacional" para luego desarrollar su sistema con notación matemática. La razón fundamental para seguir este orden no es sólo ganar capacidad operativa, pues aunque es posible dar una versión completamente matemática de su

[&] Vid. Reichenbach; parágrafo 11, p. 53.

sistema, existen propiedades importantes solamente expresables con rigor mediante el lenguaje "implicacional". Por lo dicho nosotros respetaremos el orden propuesto por Reichenbach y comenzaremos examinando sus cinco axiomas denotándolos por medio de $A_1, \ldots A_5$.

$$A_1 \,.\, (p = q) \supset \left[(A \xrightarrow[p]{} B) \,.\, (A \xrightarrow[q]{} B) \equiv (\bar{A}) \right]$$

$$A_2 \,.\, (A \supset B) \supset (Ep)\,(A \xrightarrow[p]{} B) \,.\, (p = 1)$$

$$A_3 \,.\, \overline{(\bar{A})} \,.\, (A \xrightarrow[p]{} B) \supset (p \geqq 0)$$

$$A_4 \,.\, (A \xrightarrow[p]{} B) . (A \xrightarrow[q]{} C) \,.\, (A \,.\, B \supset \bar{C}) \supset (Er)(A \xrightarrow[r]{} B \vee C) \,.\, (r = p + q$$

$$A_5 \,.\, (A \xrightarrow[p]{} B) \,.\, (A \,.\, B \xrightarrow[u]{} C) \supset (Ew)(A \xrightarrow[w]{} B.C) \,.\, (w = p \,.\, u)$$

La notación "implicacional" debe su nombre al operador '$\xrightarrow[p]{}$'. Los operadores '.' , 'v' , '$\bar{\ }$' , '$\supset$' , '$\equiv$' de la lógica de las proposiciones son asumidos como operadores para las clases B,C etc. debido al isomorfino básico existente entre un sistema formal para clases y uno para proposiciones .[&] La jerarquía de los operadores de mayor a menor, en ausencia de signos de agrupación, es como sigue : '$\xrightarrow[p]{}$' , '$\equiv$' '$\supset$' , 'v' , '.' , '$\bar{\ }$' . Los cuantificadores extienden su alcance sólo hacia la derecha hasta la aparición del primer operador diádico externo a los paréntesis adyacentes El alcance del operador '$\bar{\ }$' es la fórmula o segmento de fórmula que se encuentra debajo de su longitud. La fórmula '$A \supset B$' denota a una clase compuesta denominada clase implicación, mientras '$(A \supset B)$' denota a una implicación lógica en sentido estricto.

[&] Reichenbach recurre a esta propiedad en la obra citada, p.36,parágrafo 1 .

El axioma A_1 se denomina "axioma de univocidad", los A_2 y A_3 " axiomas de normalización " , el A_4 y el A_5 son conocidos con los nombres de "teorema de adición" y "teorema de producto", respectivamente. Claro está que A_4 y A_5 no son teoremas en rigor y las denominaciones anteriores deben ser entendidas como un homenaje a la costumbre.

Con excepción de A_1 , todos los axiomas presentados son luego traducidos a la notación matemática, llamada P-notación, de la manera a continuación precisada.

$A'_2.1$. $P(A,A \vee B) = 1$

$A'_2.2$. $P(A,B \cdot \bar{B}) = 0$

A'_3 . $P(A,B) \geq 0$

A'_4 . $P(A,B \vee C) = P(A,B) + P(A,C) - P(A,B \cdot C)$

A'_5 . $P(A,B \cdot C) = P(A,B) \cdot P(A \cdot B,C)$

La traducción efectuada no es necesario, para nuestros fines, justificarla en detalle. Basta decir que $A'_2.1$ puede ser deducido de A_2 y viceversa. El paso desde A_2 a $A'_2.1$ es secillo si se entiende que A_2 afirma que la implicación lógica es un caso particular de la implicación de probabilidades con valor 1 (usando el conocido principio de adición se deriva $A'_2.1$ desde A_2 pero el teorema inverso requiere detalles sólo comprensibles cuando se han desarrollado teoremas previos en P-notación).El axioma $A'_2.2$ determina la probabilidad cero debido a que la intersección $B \cdot \bar{B}$ es vacía. El A'_3 es un enunciado existencial que determina los valores asumibles por P(A,B El axioma A'_4 es algo más general que A_4 y se derivan recíprocamente el uno del otro. Respecto de A'_5 puede decirse que coincide exactamente con A_5 .

Hemos expuesto la traducción anterior con el propósito de poner de relieve ciertas limitaciones inherentes al paso de la notación "implicacional" a la matemática. Estas son:

(i) el denominado axioma de univocidad para el valor de una implicación de probabilidad, a condición de que la clase de referencia no sea vacía, no es traducible a la P-notación a pesar de ser evidente la necesidad de este axioma en un sistema formal, pues si una probabilidad puede asumir válidamente más de un valor dentro del sistema es inevitable que se produzcan paradojas; esto obliga a añadir en palabras, como un principio metalingüístico, a dicho axioma cuando se usa la notación matemática.[&]

(ii) el axioma A_2 ensambla la noción de implicación lógica dentro de un sistema formal de probabilidad, así la implicación lógica es introducida como un caso particular dentro del conjunto de las implicaciones de probabilidad que son iguales a 1, por lo que la fórmula conversa de A_2 no se cumple a cambio en la notación matemática la incorporación de la implicación lógica no es explícita.

(iii) el axioma A_3 expresa lo mismo que A'_3, pero el primero tiene la ventaja de ser completado por A'_1 o una consecuencia inmediata de éste, mientras que A'_3 demanda una regla, en este caso en castellano, que precise la condición de univocidad.

De cualquiera de los dos grupos de axiomas (los en notación "implicacional" o los en P-notación) son derivables los teoremas a continuación señalados . Nosotros elegiremos el primer grupo de axiomas con A_4 y A_5 tra-

[&] El axioma A_1 expresa la univocidad sólo indirectamente pero la siguiente fórmula, deducible desde él, lo hace directamente.

$$(A \underset{p}{\rightarrow} B) . (A \underset{q}{\rightarrow} B) . (\overline{A}) \supset (p = q)$$

ducidos a la P-notación por las siguientes razones metodológicas: (1) no se pierde ninguna propiedad expresable sólo en la "notación implicacional"; (2) es más clara la conexión entre los conceptos lógicos y los matemáticos; (3) es posible incorporar la regla de exclusión en el lenguaje del sistema mediante la fórmula $(A \cdot B \supset \bar{C})$ y evitar tomar el axioma A_4' que lo consideraremos teorema .

Por tanto, A_1 , A_2 y A_3 quedan inalterados mientras que las reformulaciones A_4 y A_5 son :

$$A_4 \quad \mathrm{SI}(A \cdot B \supset \bar{C}) \ , \ P(A,B \vee C) = P(A,B) + P(A,C)$$

$$A_5 \ \cdot \ P(A,B \cdot C) = P(A,B) \cdot P(A \cdot B,C) \quad .$$

continúa en la página siguiente

3.2 PRINCIPALES TEOREMAS DEL SISTEMA DE REICHENBACH

T.1 Regla del complemento: $P(A,B) + P(A,\overline{B}) = 1$

1. $(A \supset B \vee \overline{B}) \supset P(A, B \vee \overline{B}) = 1$ por A_2
2. Sustituyendo C/B en $(A . B \supset \overline{C})$
   tenemos la condición de exclusión $(A . B \supset \overline{B})$
3. $P(A, B \vee \overline{B}) = P(A,B) + P(A,\overline{B}) = 1$ por A_4
4. $P(A,B) + P(A,\overline{B}) = 1$

La regla obtenida en 4 permite derivaciones tales como

(T.1.1) $P(A,\overline{B}) = 1 - P(A,B)$

Nótese que el paso 2 puede ser omitido si se considera la propiedad definida para clases $A \cap \overline{A} = \not\phi$

T.2 Primera regla de normalización $0 \leq P(A,B) \leq 1$

1. $P(A,B) \geq 0$ por A_3
2. $P(A,B) = 1 - P(A,\overline{B})$ por T_1 y como $P(A,\overline{B})$
   nunca es un número negativo por A_3
3. $P(A,B) \leq 1$
4. $0 \leq P(A,B) \leq 1$

Este teorema muestra cuales son los valores extremos asumibles por una probabilidad $P(A,B)$ cualquiera. Es suficiente asumir que $P(A,B)$ nunca es negativa y se puede demostrar que nunca es mayor que 1.

T.3 Regla de eliminación

1. Este teorema supone la validez de la tautología
$$\left([B \vee \overline{B}] . C \equiv C\right)$$
2. Puesto que $P(A, [B\vee\overline{B}] . C) = P(A,C)$, debido a (1);
   luego es posible calcular directamente $P(A,C)$, eliminan

do el componente $B \vee \bar{B}$ de la siguiente manera.

3. $P(A,C) = P(A, [B \vee \bar{B}].C) = P(A, B.C \vee \bar{B}.C)$

4. $P(A,C) = P(A,B.C) + P(A,\bar{B}.C)$

5. $P(A,C) = P(A,B).\ P(A.B,C) + P(A,\bar{B})\ \ P(A.\bar{B},C)$

Desde T.3 puede derivarse como consecuencia inmediata pero de importancia

T.3.1 $$P(A.\bar{B}, C) = \frac{P(A,C) - P(A,B).\ P(A.B,C)}{1 - P(A,B)}$$

La validez de T.3.1, obviamente está restringida a la condición $P(A,B) < 1$.

T.4 Segunda regla de normalización.

1. Desde (T.3) se deduce

(a) $P(A,C) \geqslant P(A,B).\ P(A.B,C)$

$P(A,C) \geqslant P(A,\bar{B}).\ P(A.B,C)$

(b) $$P(A.B,C) = \frac{P(A,C) - P(A,\bar{B}).\ P(A.\bar{B},C)}{P(A,B)}$$

para $P(A,B) > 0$.

2. Por (a) los numeradores de T.3.1 y (b) nunca son menores que cero, luego

$$P(A.B,C) = \frac{P(A,C)}{P(A,B)} - \frac{P(A,\bar{B}) - P(A.\bar{B},C)}{P(A,B)}$$

3. $$P(A.B,C) \leqq \frac{P(A,C)}{P(A,B)}$$

que se cumple si $P(A,B) > 0$ y $P(A,C) \ll P(A,B)$, lo primero para evitar la indeterminación y lo segundo para prohibir valores iguales a 1, lo que impide (b) cuando $P(A,\bar{B}.C) > 0$

4. Sustituyendo en T.3 $\bar{C}$ en lugar de C

$$P(A,\bar{C}) = P(A,B).\ P(A.B,\bar{C}) + P(A,\bar{B}).\ P(A.\bar{B},\bar{C})$$

5. Dividiendo ambos miembros por P(A,B)

$$\frac{P(A,\bar{C})}{P(A,B} = \frac{P(A,B).\ P(A.B,\bar{C}) + P(A,\bar{B}).\ P(A.\bar{B},\bar{C})}{P(A,B)}$$

6. Desdoblando el segundo componente en dos fracciones y trasladando términos

$$\frac{P(A,\bar{C})}{P(A,B} - \frac{P(A,\bar{B}).\ P(A.\bar{B},\bar{C})}{P(A,B)} = \frac{P(A.B).\ P(A.B,\bar{C})}{P(A,B)}$$

7. $$\frac{P(A,\bar{C})}{P(A,B)} - \frac{P(A,\bar{B}).\ P(A.\bar{B},\bar{C})}{P(A,B)} = 1 - P(A.B,C)$$

8. Trasladando términos y cambiando de signo

$$P(A.B,C) = 1 - \frac{P(A,\bar{C})}{P(A,B)} + \frac{P(A,\bar{B}).\ P(A.\bar{B},C)}{P(A,B)}$$

9. $$P(A.B,C) \geqslant \frac{1 - P(A,\bar{C})}{P(A,B)}$$

10. $$P(A.B,C) \geqslant 1 - \frac{1 - P(A,C)}{P(A,B)}$$

11. Por los resultados obtenidos en (3) y (10) se tiene

$$1 - \frac{1 - P(A,C)}{P(A,B)} \leqq P(A.B,C) \leqq \frac{P(A,C)}{P(A,B)}$$

Esta desigualdad, que denominamos segunda regla de normalización, está sometida a las restricciones indicadas en (3) y a $1 - P(A\ C) < P(A,B)$. Reichenbach la consigna en la pág. 79 de su libro, sin dar demostración de ella. Esta omisión no llamaría la atención si el autor no se hubiera esmerado antes en proporcionar demostraciones de otros teoremas sencillísimos.

T.5 Regla de Eliminación Generalizada a r componentes.

1. Sea $B_1 \vee \ldots \vee B_r$ una disyunción exclusiva completa, esto es, uno y sólo uno de sus componentes es verdadero y están especificadas todas las r-posibilidades lógicas en una situación dada. Por tanto $B_1 \vee \ldots \vee B_r$ es verdadera y puede ser considerada como el detallamiento de $B \vee \bar{B}$.

2. Desde (1) tenemos

$$\left([B_1 \vee \ldots \vee B_r] . C \equiv C\right)$$

3. $P(A,C) = P(A, [B_1 \vee \ldots \vee B_r] . C)$

4. $P(A,C) = P(A, B_1 . C \vee \ldots \vee B_r . C)$

5. $P(A,C) = \sum_{k=1}^{r} P(A, B_k . C)$

6. $P(A,C) = \sum_{k=1}^{r} P(A, B_k) . P(A . B_k, C)$

T.6 Teorema General de la Adición (Para disyunciones exclusivas e inclusivas).

1. Dada la equivalencia tautológica

$$(B \vee C \equiv B.C \vee \bar{B}.C \vee B.\bar{C})$$

2. $P(A, B \vee C) = P(A, B.C \vee \bar{B}.C \vee B.\bar{C})$

3. $P(A, B \vee C) = P(A,B.C) + P(A,\bar{B}.C) + P(A,B.\bar{C})$

4. Puesto que $P(A,B) = P(A,B. [C \vee \bar{C}])$ y

$$P(A,C) = P(A, [B \vee \bar{B}] . C)$$

por la tautología usada en T.3.1.

5. $P(A,B) = P(A,B.C) + P(A,B.\bar{C})$

6. $P(A,C) = P(A,B.C) + P(A,\bar{B}.C)$

7. Como sustituir en (3) los valores despejados desde (5) y (6) para $P(A,B.\bar{C})$ y $P(A,\bar{B}.C)$ equivale a sumar las ecuaciones 3, 5 y 6; luego

8. $P(A, B \vee C) = P(A,B) + P(A,C) - P(A,B.C)$

Consecuencias inmediatas de (5) y (6) de la demostra - ción anterior son

T.6.1 $P(A,B.C) \leqq P(A,B)$

T.6.2 $P(A,B.C) \leqq P(A,C)$

T.7 Los valores que se obtienen mediante el teorema general de la adición satisfacen T.2.

1. Por T.4. $1 - \dfrac{1 - P(A,C)}{P(A,B)} \leq P(A.B,C)$

2. $- \dfrac{1 - P(A,C)}{P(A,B)} \geqq P(A.B,C) - 1$

3. $- (1 - P(A,C) \geqq (P\ (A.B,C) - 1). P(A,B)$

4. $P(A,C) - 1 \geqq P(A.B,C).\ P(A,B) - P(A,B)$

5. $P(A,B) + P(A,C) - 1 \leqq P(A.B,C).\ P(A,B)$

6. $P(A,B) + P(A,C) \geqq P(A,B.C) + 1$

7. $P(A,B) + P(A,C) - P(A,B.C) \leqq 1$

Por el axioma A.3, la expresión de (7) satisface la desigualdad izquierda de T.2.

T.8 El valor de probabilidad de $P(A,B \supset C)$ es determinable.

1. Dada la equivalencia tautológica $(B \supset C \equiv \bar{B} \vee C)$

2. $P(A,B \supset C) = P(A,\bar{B} \vee C)$

3. $P(A,\bar{B} \vee C) = P(A,\bar{B}) + P(A,C) - P(A,\bar{B}.C)$

4. Por 1, b de T.4, tenemos
$P(A,B).\ P(A.B,C) = P(A,C) - P(A,\bar{B}).\ P(A.\bar{B},C)$

5. Desarrollando por A.5 el componente $P(A,\overline{B}.C)$ de (3) y sustituyendo en atención a (4),

$P(A,\overline{B} \vee C) = P(A,\overline{B}) + P(A,B).\ P(A.B,C)$

6. $P(A,B \supset C) = 1 - P(A,B) + P(A,B).\ P(A.B,C)$

T.9 El valor de probabilidad de $P(A,B \equiv C)$ es determinable.

1. Por la tautología, $\left([B \equiv C] \equiv [B.C \vee \overline{B}.\overline{C}]\right)$
2. $P(A,B \equiv C) = P(A,B.C) + P(A,\overline{B}.\overline{C})$
3. Puesto que $P(A,\overline{B}.\overline{C}) = P(A,\overline{B \vee C})$ por tautología de De Morgan
4. $P(A,B \equiv C) = P(A,B.C) + 1 - P(A,B \vee C)$
5. $P(A,B \equiv C) = 1 + P(A,B.C) - P(A,B \vee C)$

T.10 El valor de probabilidad de $P(A,B \not\equiv C)$ es determinable, donde el signo '$\not\equiv$' es el de la disyunción exclusiva.

1. Asumamos $\left([B \not\equiv C] \equiv [\overline{B \equiv C}]\right)$
2. $P(A, B \not\equiv C) = P(A, \overline{B \equiv C})$
3. $P(A, \overline{B \equiv C}) = 1 - (\ 1 + P(A,B.C) - P(A,B) + P(A,C) - P(A,B.C))$
4. $P(A, B \not\equiv C) = P(A,B) + P(A,C) - 2\ P(A,B.C)$

Los teoremas T.6, T.8, T,9 y la consecuencia T.1. 1 son propuestos sin desarrollar en el parágrafo 35 del libro <u>Experience and Prediction.</u> Recalcamos que el interés de los teoremas mencionados radica en que se calculan probabilidades para clases determinadas por operadores estrictamente lógicos.

T.11. Regla del Producto.

1. Puesto que la regla de sustitución se cumple en este sistema formal como en cualquier otro, A.5 es simétrico con

respecto a B y C,

$$P(A,B.C) = P(A,B).\ P(A.B,C) = P(A,C).\ P(A.C,B)$$

2. La ecuación

$P(A,B).\ P(A.B,C) = P(A,C).\ P(A.C,B)$, se denomina regla del producto.

De ella se siguen las consecuencias inmediatas

T.11.1 $$\frac{P(A.B,C)}{P(A.C,B)} = \frac{P(A,C)}{P(A,B)}$$

T.11.2 $$\frac{P(A.C,B)}{P(A,B)} = \frac{P(A.B,C)}{P(A,C)}$$

T.11.3 desde (2)

$$P(A.C,B) = P(A.B,C)\ \frac{P(A,B)}{P(A,C)}$$

T.11.4 sustituyendo $\overline{C}$ por C en T.11.3

$$P(A.\overline{C},B) = \left[1 - P(A.B,C)\right]\ \frac{P(A.B)}{1 - P(A,C)}$$

El detallamiento anterior tiene por objeto demostrar que todos los valores determinables mediante A.4, A.5, T.1, T.4, T.6, T.8, T.9, T.10, T.11 y sus consecuencias, son determinables si se conocen los de

$$P(A,B),\quad P(A,C),\quad P(A.B,C)$$

T.12. Regla para la probabilidad de una hipótesis o regla de Bayes

1. Por T.11.3 y T.3

$$P(A.C,B) = \frac{P(A,B).\ P(A.B,C)}{P(A.B).\ P(A.B,C) + P(A.\overline{B}).\ P(A.\overline{B},C)}$$

2. Si al sustituir el denominador de T.11.3 usamos T.5

que es la generalización de T.3, tenemos

$$P(A.C, B_k) = \frac{P(A,B_k).\ P(A.B_k, C)}{\sum_{i=1}^{r} P(A,B_i).\ P(A.B_i,C)}$$

Donde el subíndice k es un valor del intervalo abierto 1...... r , y la disyunción $B \vee \overline{B}$ ha sido detallada por $B_1 \vee \ldots \vee B_r$.

La Teoría clásica de la probabilidad vio en esta regla el método de descubrir nuevas probabilidades. Con la ayuda del "principio de indiferencia" se asumía que si no existía información entonces todas las probabilidades $P(A,B_i)$ eran iguales y se les denominó "probabilidades a priori". La crítica a esta suposición ya fue hecha anteriormente en el parágrafo 1.1.3.6. Evidentemente si no se conocen las $P(A,B_i)$ la ecuación queda indeterminada, pues tampoco podemos tomar $P(A,B_k)$. Por la forma de $P(A.C,B_k)$ también se denomina a T.12, regla de la probabilidad inversa.

T.13 Regla de Reducción.

1. Si $B \vee C$ es una disyunción exclusiva no completa con respecto a A, luego

   $A.\,[B \vee C]$ no se reduce A, pues no sabemos exactamente si $B \vee C$ es verdadera.

2. Por A.5 $P(A.B,D) = \dfrac{P(A,B.D)}{P(A,B)}$

3. Sustituyendo $B \vee C$ por B en (2)

$$P(A.[B \vee C], D) = \frac{P(A,[B \vee C].D)}{P(A,B \vee C)} = \frac{P(A,B.D \vee C.D)}{P(A,B \vee C)}$$

4. Desarrollando por A.5 $P(A,B.D)$ y $P(A,C.D)$,

$$P(A.[B \vee C], D) = \frac{P(A,B).\ P(A.B,D) + P(A,C).\ P(A.C,D)}{P(A,B) + P(A,C)}$$

Esta regla se denomina de reducción por que la clase de referencia se obtiene cancelando un B_i en $A.[B_1 \vee \ldots\ldots \vee B_r]$, de tal modo que obtenemos $A.[B_1 \vee \ldots\ldots \vee B_m]$ donde $m < r$ y r es el número de componentes de una disyunción exclusiva completa. Por tanto, mientras $A.[B_1 \vee \ldots\ldots \vee B_r]$ equivale a A, en cambio $A.[B_1 \vee \ldots\ldots \vee B_m]$ no equivale a A. Se ha reducido pues el número de componentes de $B_1 \vee \ldots\ldots \vee B_r$.

T.14 Regla de Reducción generalizada a m componentes disyuntivos exclusivos.

De acuerdo a la nota adjunta a T.13, consideramos que el teorema anterior ha sido demostrado para $m = 2$. Toca ahora generalizarlo a cualquier número m, con la limitación $m < r$.

1. $$P(A.[B_1 \vee \ldots\ldots \vee B_m], D) = \frac{\sum_{k=1}^{m} P(A,B_k).\ P(A.B_k, D)}{\sum_{k=1}^{m} P(A,B_k)}$$

Si, tomamos $B_1 \vee \ldots \vee B_r$, entonces tenemos una consecuencia inmediata de T.14.

T.14.1 $P(A,D) = P(A.[B_1 \vee \ldots\ldots \vee B_r], D) = \sum_{k=1}^{r} P(A,B_k)\ P(A.B_k,D)$

que es una versión coincidente con T.5. Sin embargo, insistimos aun siendo obvio, que el valor de T.14 para $m < r$ no es igual al de $P(A,D)$. Omitimos el denominador porque al ser una disyunción completa, $\sum_{k=1}^{r} P(A,B_k)$ es igual a 1.

T.14.2 1. Puesto que $B_1 \vee \ldots \vee B_m$ es exclusiva luego $P(A.B_k , B_k) = 1$ y $P(A.B_k, B_i) = 0$ si $k \neq i$

2. Por (1) la probabilidad para un componente, denominada "probabilidad reducida" de la disyunción $B_1 \vee \ldots \vee B_m$, es

$$P(A.[B_1 \vee \ldots \vee B_m] , B_k) = \frac{P(A\ B_k)}{\sum_{i=1}^{m} P(A, B_i)}$$

para $1 \leqq k \leqq m$

T.14.3 La sumatoria de las probabilidades reducidas es igual a 1 , pues

$$\sum_{k=1}^{m} P(A.[B_1 \vee \ldots \vee B_m], B_k) = P(A.[B_1 \vee \ldots \vee B_m], [B_1 \vee \ldots \vee B_m]) = 1$$

T.15 Regla de reducción ampliada para disyunciones inclusivas.

1. Por T.13, línea (3)

$$P(A.[B \vee C], D) = \frac{P(A, B.D \vee C.D)}{P(A, B \vee C)}$$

2. Aplicando T.6 a (1)

$$P(A.[B \vee C] , D) = \frac{P(A, B.D) + P(A, C.D) - P(A, B.D.C)}{P(A, B) + P(A, C) - P(A\ B.C)}$$

Consecuencia inmediata de T.15 es su aplicación al cálculo de probabilidades reducidas.

T.15.1 Reemplazando en T.15 B en lugar de D,

$$P(A.[B \vee C], B) = \frac{P(A, B).P(A.B, B) + P(A, C)\ P(A.C, B) - P(A, B).P(A.B, C).P(A.B.C, B)}{P(A, B) + P(A, C) - P(A, B).\ P(A.B, C)}$$

Dado que: (a) $P(A.B, B) = 1$, pues $(A.B \supset B)$ es tautología

(b) $P(A, C).\ P(A.C, B) = P(A, B).\ P(A.B, C)$

$$P(A.[B \vee C], B) = \frac{P(A,B)}{P(A,B) + P(A,C) - P(A,B).\ P(A.B,C)}$$

T.15.2 Sustituyendo en T.15.1 C en lugar de B podemos encontrar

$$P(A.[B \vee C], C) = \frac{P(A,C)}{P(A,B) + P(A,C) - P(A,B).\ P(A.B,C)}$$

T.16 Teorema de multiplicación cuando las clases B y C son independientes.

1. Consideremos $P(A.B,C) = P(A,C)$ como condición de independencia.

2. Por A.5 y (1), tenemos

$$P(A,B.C) = P(A,B).\ P(A,C)$$

Es claro que la condición de independencia de B y C siempre se formula con respecto a una determinada clase de referencia. Puede ser el caso que B y C no sean independientes respecto de la clase D, por ejemplo.

Asumiendo la condición de independencia, se tienen las siguientes consecuencias inmediatas.

T.16.1 El teorema T.6 se transforma en

$$P(A,B \vee C) = P(A,B) + P(A,C) - P(A,B).\ P(A,C)$$

T.16.2 El teorema T.15 se transforma en

$$P(A.[B \vee C], D) = \frac{P(A,B.D) + P(A,C.D) - P(A,B.C.D)}{P(A,B) + P(A,C) - P(A,B).\ P(A,C)}$$

T.16.3 La consecuencia T.15.2, debido a T.11, se transforma en

$$P(A.[B \vee C], C) = \frac{P(A,C)}{P(A,B) + P(A,C) - P(A,B).\ P(A,C)}$$

T.17 Dadas dos clases cualesquiera B y C, estas no son independientes entre si con respecto a toda clase de referencia.

1. Si B y C fueran independientes entre sí respecto de toda clase de referencia, entonces lo serían respecto de $A.[B \vee C]$.
2. Si se cumpliera (1), luego se cumpliría
$$P(A.[B \vee C].B,C) = P(A.[B \vee C], C)$$
3. Por T.16.3, tenemos
$$P(A.[B \vee C], C) = \frac{P(A,C)}{P(A,B) + P(A,C) - P(A,B).P(A,C)}$$

En esta ecuación para $P(A,B) = P(A,C) = 1$, el caso extremo superior, es igual a $P(A,C)$. En los otros casos menores que uno pero diferentes de cero, el numerador $P(A,C)$ se multiplicará al ser dividido por un número menor que 1. Por tanto si tomamos las condiciones $P(A,B) < 1$ y $P(A,C) < 1$

4. $$\frac{P(A,C)}{P(A,B) + P(A,C) - P(A,B).P(A,C)} > P(A,C)$$
5. $P(A.[B \vee C], C) > P(A,C)$
6. Dada la tautología $([B \vee C].B \equiv B)$
$$P(A.[B \vee C].B,C) = P(A.B,C) = P(A,C)$$
Supuesta la independencia de B y C respecto de A, pues de lo contrario no tendría sentido el teorema.
7. Por (5) y (6)
$$P(A.[B \vee C].B,C) < P(A.[B \vee C], C)$$

La desigualdad de (7) muestra que no se cumple la igualdad de (2). Por tanto existe una clase de referencia $A.[B \vee C]$ respecto de la cual no son independiente B y C. La importancia teórica de este teorema es notable. Establece claramente la necesidad de una clase de referencia para hablar de independencia en el cálculo de las probabilidades. La relación de independencia es así de carácter triádico, en este caso, entre B y C con respecto de A.

T.18 Dada una probabilidad cualquiera P(A,B), si esta cumple la condición (i) $(x_i \in A)$, luego puede omitirse su clase de referencia y escribirse simplemente P(B), llamándose en este caso a P(B) <u>probabilidad absoluta</u>.

1. Tenemos que (i) $(x_i \in A \vee \bar{A})$ es analíticamente verdadera.
2. $A \vee \bar{A}$, de acuerdo a (1) es una secuencia compacta. Asumir que existe al menos un x_i que no pertenece a $A \vee \bar{A}$ conduce a contradicción, pues este x_i resultaría perteneciendo a la clase vacía
3. Si en P(A,B), la clase A es compacta pues cumple (i)$(x_i \in A)$, luego puede ser sustituida por la clase siempre compacta $A \vee \bar{A}$, que puede ser omitida para hablar de probabilidades absolutas en el sentido de relativas a $A \vee \bar{A}$
4. Luego $P(B) = P(A \vee \bar{A}, B)$

   Asumiendo que su clase de referencia cumple (i) $(x_i \in A)$

podemos, de acuerdo a T.18, reformular los teoremas T.1, T.3, T.6, T.11 y T.15, en el mismo orden, de la siguiente manera.

T.18.1 $P(B) + P(\overline{B}) = 1$

T.18.2 $P(C) = P(B).\ P(B,C) + P(\overline{B}).\ P(\overline{B},C)$

T.18.3 $P(B \vee C) = P(B) + P(C) - P(B.C)$

T.18.4 $P(B.C) = P(B).\ P(B,C) = P(C).\ P(C,B)$

T.18.5 Desarrollando T.15 por T.18.4, tenemos

$$P(B \vee C,D) \quad \frac{P(B).\ P(B,D)+P(C).\ P(C,D) - P(B).\ P(B,C).\ P(B.C,D)}{P(B) + P(C) - P(B).\ P(B,C)}$$

De T.18.5 puede deducirse la ecuación correspondiente a los casos en que B excluye a C y conversamente C a B. Es suficiente considerar $P(B,C) = 0$.

T.19 Dado un número n de clases, B_1, B_2, ... Bn, las combinaciones hechas con ellas y con sus respectivas clases complementarias generan el <u>sistema completo de probabilidade para n clases</u>. El número w de componentes de dicho sistema es calculable, recurriendo a los coeficientes binómicos, por la fórmula

$$w = \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} m \cdot 2^{m} = 2n \cdot 3^{n-1}$$

La demostración de esta fórmula, aunque podría ser consignada inmediatamente a continuación de ella, será más fácilmente esbozada aprovechando lo que sigue.

A continuación expondremos, como consecuencia de T.19, uno de sus ejemplos posibles. Así tendremos ocasión de examinar algunas de las propiedades importantes de un sistema completo de probabilidades.

T.19.1 (1) De acuerdo a T.19, el sistema completo de probabilidades construible con las clases B y C tiene los doce componente siguientes.

$P(B)$	$P(\bar{B})$	$P(C)$	$P(\bar{C})$
$P(B,C)$	$P(\bar{B},C)$	$P(C,B)$	$P(\bar{C},B)$
$P(B,\bar{C})$	$P(\bar{B},\bar{C})$	$P(C,\bar{B})$	$P(\bar{C}.\bar{B})$

(2) Usando como datos o probabilidades independientes a $P(B)$, $P(C)$ y $P(B,C)$, puede determinarse mediante T.18.1 — T.18.5 el valor de todo componente del sistema. Valiéndonos, por ejemplo, de T.18.4, derivamos como consecuencia inmediata

$$\frac{P(B,C)}{P(C,B)} \qquad \frac{P(C)}{P(B)}$$

Esta fórmula nos permite precisar, desde los datos, el valor de $P(C,B)$. Agregamos que a las probabilidades que se encuentran en una relación análoga a la de $P(B,C)$ con respecto a su conversa $P(C,B)$, se les denomina probabilidades mutuas. Cuando las probabilidades contienen clases complementarias para decidir su valor se usa T.18.2.

(3) El número ν de probabilidades independientes o datos, necesarios para calcular los valores de todas las probabilidades del sistema, se obtiene de la manera a continuación señalada: (i) considérese una probabilidad absoluta $P(B_i)$ por cada una de las n clases; (ii) por cada subconjunto de m clases una probabilidad debe ser da

da. De acuerdo a lo precedente, el número ν de probabilidades independientes es igual al número de subconjuntos menos uno, que se pueden formar con un conjunto de n miembros. El subconjunto que restamos es, obviamente, el vacío. Por tanto, el número ν es determinable por medio de la fórmula

$$\nu = \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} = 2^{n} - 1$$

Si asumimos que el ejemplo de (1) lo hemos construido sin conocer T.19, por inspección; entonces la fórmula anterior puede ser el punto de partida para deducir T.19. Para realizar este propósito basta añadir que por cada subconjunto de m clases hay m probabilidades afirmativas (si se escribe cada una de las m clases en el lugar de la clase atributo) y que cada clase tiene su respectiva clase complemento. Por tanto cada probabilidad afirmativa genera 2^{m} probabilidades distintas, lo que se expresa matemáticamente

$$\sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} . \; m \cdot 2^{m} = 2n\, 3^{n-1} = w$$

4. Para $n > 2$, la fórmula de (2) la generalizamos a

$$\frac{P\left(B_{k_1} \ldots B_{k_{m-1}}, B_{k_m}\right)}{P\left(B_{k_1} \ldots B_{k_{m-2}} . B_{k_m}, B_{k_{m-1}}\right)} = \frac{P\left(B_{k_1} \ldots B_{k_{m-2}}, B_{k_m}\right)}{P\left(B_{k_1} \ldots B_{k_{m-2}}, B_{k_{m-1}}\right)}$$

5. El establecimiento de P(B), P(C) y P(B,C) como probabilidades independientes es convencional. Existe la posibilidad de deducir (P(B) y P(C) desde P(B.C), P(C,B), P($\overline{B}$,C). Para lo anterior basta

$$P(B) = \frac{P(C,B).\ P(\overline{B},C)}{P(B,C)\ [1-P(C,B)] + P(C,B) - P(\overline{B},C)}$$

$$P(C) = \frac{P(B,C).\ P(\overline{B},C)}{P(B,C)\ [1 - P(C,B)] + P(C,B) - P(\overline{B},C)}$$

Estas fórmulas son deducibles de T.18.4 mediante tres sustituciones sucesivas. Para estas sustituciones se usan como probabilidades independientes P(B,C), P(C,B), P($\overline{B}$,C) La resolución de las ecuaciones obtenidas para P(B) y P(C) da lugar a los resultados arriba mostrados.

CONCLUSIONES

1. Los áutores estudiados coinciden en admitir que en el lenguaj científico existen dos tipos de enunciados de probabilidad: los referentes a la probabilidad de acontecimientos y los referentes a la probabilidad de hipótesis. Nos inclinamos a pensar, siguiendo a Carnap y a Popper, que los tipos mencionados no son reducibles entre sí. Esto significa que consideramos válidas las objeciones hechas a lo dicho en 1.1.3.5 .

2. Las leyes científico-empíricas deben ser tomadas como los enunciados de probabilidad más interesantes desde el punto de vista epistemológico. Sin embargo su forma lógica, como a menudo sucede, puede contener relaciones n-ádicas ($n \geq 2$) que escapan a los casos de computabilidad efectiva previsto para el modelo de rango y también a la simplicidad de la frecuencia relativa. Reichenbach, consciente de la insuficiencia de su planteamiento sobre este asunto, complementó la noción de frecuencia relativa con la de una relación funcional específica. La exposición detallada de las características de esta relación rebasa los alcances del presente trabajo . Un tratamiento edecuado de ella puede encontrarse en el artículo de Reichenbach <u>El principio de causalidad y la posibilidad de su conformación empíric</u> publicado en su <u>Moderna Filosofía de la Ciencia</u>.

3. El modelo frecuencial proporciona una explicación satisfactoria de las leyes científico-empíricas usualmente denominadas estadísticas. Esto se debe posiblemente a que la estadística matemática usada tanto para la investigación en ciencias naturales como sociales admite la validez del modelo frecuencial.

4.-El modelo frecuencial, a pesar de los esfuerzos de Reichenbach por hacerlo estrictamente empírico, nos conduce en última instancia a la creencia apriorística de que la frecuencia relativa de los acontecimientos futuros no se apartará del límite de la sucesión. En la medida que esta creencia carece de base empírica, dicho autor reconoce sus inconvenientes y opta por recomendar que la tomemos como nuestra mejor apuesta ante la imposibilidad de hacer otra cosa . Esta "solución" al problema ha sido duramente criticada por los sectores no frecuencialistas.

5. Una ventaja importante ofrecida por el modelo de rango es que elimina la cuestión planteada por el valor de la probabilidad de un enunciado de probabilidad (probabilidad lógica). Ello se debe a que c(h,e) es una función analíticamente decidible en los casos indicados en 2.1.2 . Evidentemente, para fundamentar esta conclusión, basta señalar el carácter analítico de c(h,e) .

6. La paradoja construida por Popper, aun en el caso de ser fundada, no invalidaría propiamente al modelo de rango sino objetaría la identificación hecha entre probabilidad lógica y grado de confirmación. De otra parte, si se revisan las definiciones dadas por Popper y Carnap para 'probabilidad', se encuentra que ellas son similares. La probabilidad lógica de un enunciado -definida por Popper como el complemento de sus posibles falsadores-no es otra cosa que el rango de dicho enunciado. La diferencia está en que Carnap no llama probabilidad lógica al rango de un enunciado sino a una relación entre rangos. Debido a tal diferencia la tesis de Carnap puede librarse de la paradoja esgrimida por Popper. Para ello es suficiente que no se acepte, lo cual es completamente coherente, que los valores i/6 y 5/6 del ejemplo son probabilidades y se les llame simplemente rangos. De procederse así pierde sentido hablar del aumento o disminución de valores de probabili-

dad como lo hace Popper.

7. La tesis de Popper, que estima relevante para la epistemología no tanto la probabilidad de los enunciados sino su contenido informativo, debe ser tomada en cuenta. Un argumento importante es que la Teoría de la información reconoce que los enunciados más probables son los de contenido más pobre. Se comprende mejor la tesis de Popper si admitimos que un fin importante del conocimiento científico es proporcionar explicaciones satisfactorias, y que los enunciados con pobre contenido informativo, por tener escasa capacidad explicativa, impiden alcanzar dicho objetivo.

8. Es posible construir un sistema axiomático de probabilidades en el que se demuestran los teoremas del cálculo de las probabilidades usando como reglas de transformación (añadidas a las propiamente matemáticas) algunas tautologías de la lógica proposicional. Esto tiene especial interés para quienes desean esclarecer las relaciones entre lógica y matemáticas.

BIBLIOGRAFIA .

1. Braithwaite,Richard B.

   La explicación científica
   (Editorial Tecnos,Madrid,1965)

2. Carnap,Rudolf

   a) Logical foundations of probability
   (The University of Chicago Press,Chicago,1950)

   b) Introduction to Simbolic Logic and its applications
   (Dover Publications,Inc, New York,1958)

   c) Fundamentación lógica de la Física
   (Editorial Sudamericana,Buenos Aires,1969)

3. Cherry,Colin

   On Human Communication
   (The Massachusetts Institute of Technology,Massachusetts,1957)

4. Day , John Patrick

   Inductive Probability
   (Routledge and Kegan Paul,London,1961)

5. Del Busto,Eduardo H.

   Las teorías modernas de la probabilidad
   (Cuadernos de Lógica,Epistemología e Historia de la Ciencia,Instituto Luis Vives,Madrid,1955)

6. Kleene,Stephen Cole

   Mathematical Logic
   (John Wiley and Sons,Inc,New York,1968)

7. Kneale,William

   Probability and Induction
   (Basil Blackwell,Oxford,1965)

8. Lakatos, Imre(ed.)

<u>The problem of Inductive Logic</u>
(North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1968)

9. Laplace, Pierre Simon

<u>Ensayo filosófico sobre las probabilidades</u>
(Espasa-Calpe, Buenos Aires, 1947)

10. Nagel, Ernest

<u>Principles of the theory of probability</u>
(The University of Chicago Press, Chicago, 1969)

11. Pierce, J.R.

<u>Símbolos, señales y ruidos</u>
(Revista de Occidente, Madrid, 1962)

12. Popper, Karl R.

<u>La lógica de la investigación científica</u>
(Editorial Tecnos, Madrid, 1962)

13. Reichenbach, Hans

a) <u>The theory of probability</u>
(University of California Press, San Francisco, 1949)

b) <u>Experience and Prediction</u>
(The University of Chicago Press, Chicago, 1961)

c) <u>Elements of Simbolic Logic</u>
(The Macmillan Company, New York, 1966)

d) <u>Moderna filosofía de la ciencia</u>
(Editorial Tecnos, Madrid, 1965)

14. von Mises, Richard

<u>Probabilidad, Estadística y Verdad</u>
(Espasa -Calpe, Buenos Aires, 1946)

15. von Wright, G. H.

<u>The logical problem of Induction</u>
(Basil Blackwell, Oxford, 1965)

16. Wittgenstein, Ludwig

Tractatus logico philosophicus

(Routledge and Kegan Paul, London, 1966)

INDICE